6. Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů v rovině.

6.1. V této kapitole budeme studovat geometrické úlohy v rovině analyticky, tj. lineární a kvadratické geometrické útvary vyjádříme pomocí vztahů mezi souřadnicemi.

V celé kapitole budeme předpokládat, že v rovině je pevně zvolena kartézská soustava souřadnic $(0;\ x, y)$.

Nechť jsou dány v rovině body $A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$. **Vzdálenost** $|AB|$ **bodů** A, B je dána vzorcem

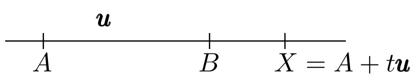
$$\boxed{|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

6.2. Parametrické vyjádření přímky v rovině.

Zvolme na přímce dva různé body A, B. Body A, B určují na přímce nenulový vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$. Rovnici

$$\boxed{X = A + t\boldsymbol{u},\ \text{kde } t \in \mathbf{R}},$$

kde X je libovolný bod přímky, nazveme **parametrickou rovnicí přímky**, kde A je bod přímky, t je **parametr** a $\boldsymbol{u}$ je **směrový vektor** přímky (viz obr. 6.1).



Obr. 6.1

- Je-li $t \in \langle 0, \infty)$, je bod X bodem polopřímky AB.
- Je-li $t \in (-\infty, 0\rangle$, je bod X bodem polopřímky opačné k polopřímce AB.
- Je-li $t \in \langle 0, 1\rangle$, je bod X bodem úsečky AB.
- Je-li $t = \frac{1}{2}$, je bod X středem úsečky AB.

Nechť je dán v rovině bod $A = [a_1, a_2]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$. Potom přímka, která prochází bodem A a má směrový vektor $\boldsymbol{u}$, má toto **parametrické vyjádření v souřadnicích**:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2,\ t \in \mathbf{R} \end{aligned}},$$

$X = [x, y]$ je libovolným bodem přímky.

Přímku určenou bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$ budeme značit $p(A, \boldsymbol{u})$.

6.3. Neparametrické vyjádření přímky v rovině.

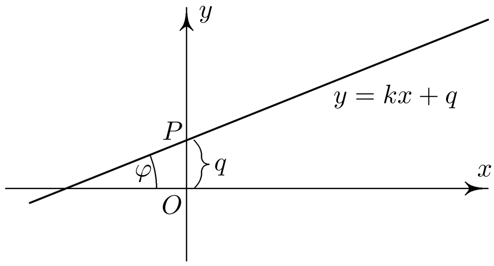
- **Směrnicová rovnice přímky**(viz obr. 6.2) má tvar

$$\boxed{y = kx + q,\ k, q \in \mathbf{R}} \tag{6.1}$$

Koeficient k se nazývá **směrnice přímky**. Jeho geometrický význam je dán vztahem $k = \operatorname{tg}\varphi$, kde φ je **směrový úhel přímky**, tj. úhel, který přímka svírá s kladnou poloosou x. Koeficient q je úsek, který přímka vytíná na ose y, tj. y-ová souřadnice průsečíku přímky s osou y. Je-li v rovnici (6.1) $q = 0$, přímka prochází počátkem, je-li $k = 0$, přímka je rovnoběžná s osou x. Rovnicí (6.1) nelze vyjádřit přímku rovnoběžnou s osou y. Přímka rovnoběžná s osou y má rovnici $x = c,\ c \in \mathbf{R}$.

- **Přímka určená bodem** $A = [a_1, a_2]$ a **směrnicí** k , má rovnici

$$\boxed{y - a_2 = k(x - a_1),\ k \in \mathbf{R}} \tag{6.2}$$

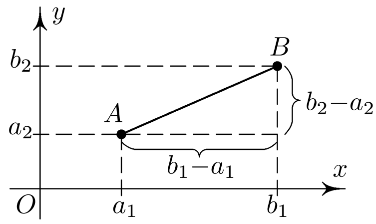


Obr. 6.2

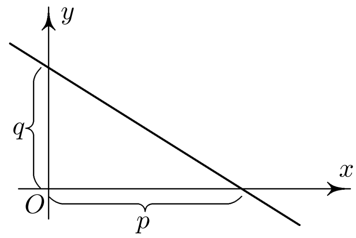
- **Přímka určená dvěma různými body** $A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$, kde $a_1 \neq b_1$, má rovnici

$$\boxed{y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)} \tag{6.3}$$

Dostaneme ji z rovnice (6.2), vyjádříme-li $k = \operatorname{tg}\varphi$ z pravoúhlého trojúhelníku na obr. 6.3.



Obr. 6.3



Obr. 6.4

- Přímka vytínající na osách x, y úseky p, q má rovnici

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,\ p, q \in \mathbf{R},\ p \cdot q \neq 0}$$

(viz obr. (6.4)). Této rovnici se říká **úseková rovnice přímky**.

- Všechny dosud uvedené tvary rovnice přímky v rovině jsou speciálním případem lineární rovnice o dvou neznámých x a y tvaru

$$\boxed{ax + by + c = 0,\ (a, b) \neq (0, 0)}$$

Tato rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**.

6.4. Vzdálenost bodu od přímky. Nechť je v rovině dána přímka p rovnicí $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) \neq (0, 0)$ a bod $M = [m_1, m_2]$. Potom vzdálenost bodu M od přímky p je

$$\boxed{v = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \tag{6.4}$$

6.5. Odchylka α dvou přímek v rovině. Jsou-li $p\colon y = k_1x + q_1$, $q\colon y = k_2x + q_2$ dvě přímky, pak jejich odchylka α je dána vzorcem

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|, \; k_1 \cdot k_2 \neq -1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ je-li } k_1 \cdot k_2 = -1.} \tag{6.5}$$

Kvadratické útvary v rovině (kuželosečky) jsou analyticky popsány kvadratickou rovnicí. Jsou to: kružnice, elipsa, hyperbola, parabola. V této kapitole budeme analyticky vyjadřovat jen kuželosečky, jejichž osy leží na osách kartézské soustavy souřadnic, nebo jsou s nimi rovnoběžné.

6.6. Kružnice. Kružnice je množina bodů, které mají od daného bodu, zvaného **střed kružnice**, stejnou nenulovou vzdálenost zvanou **poloměr kružnice**.

- Kružnice se středem $S = [x_0, y_0]$ a s poloměrem r má rovnici

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad r \in \mathbf{R}^+} \tag{6.6}$$

- Je-li střed $S = [0, 0]$, kružnice má rovnici

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2, \quad r \in \mathbf{R}^+} \tag{6.7}$$

Tečna ke kružnici s rovnicí (6.6) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$\boxed{(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2}$$

Je-li střed $S = [0, 0]$, tj. v případě kružnice s rovnicí (6.7), má tečna rovnici

$$\boxed{xx_1 + yy_1 = r^2}$$

6.7. Elipsa. Elipsa je křivka (viz obr. 6.5), jejíž všechny body mají konstantní součet vzdáleností od dvou různých pevně zvolených bodů. Tyto body se označují F_1, F_2 a nazývají se **ohniska elipsy**. Součet vzdáleností $|F_1M| + |F_2M|$, kde M je libovolný bod elipsy, se označuje $2a$; zřejmě $a \in \mathbf{R}^+, 2a > |F_1F_2|$. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed elipsy**. Přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa** a kolmice k ní vedená bodem S se nazývá **vedlejší osa** elipsy. Průsečíky A_1, A_2 elipsy s hlavní osou a průsečíky B_1, B_2 s vedlejší osou se nazývají **vrcholy** elipsy. Úsečky SA_1 a SA_2, pro jejichž velikosti platí vztah $|SA_1| = |SA_2| = a$, se nazývají **hlavní poloosy** a úsečky SB_1 a SB_2, jejichž velikost se značí b, se nazývají **vedlejší poloosy**. Pro velikost hlavní a vedlejší poloosy platí vztah $a > b$. (Hlavní, resp. vedlejší poloosou se často nazývá též číslo a, resp. číslo b.) Číslu $e = |SF_1| = |SF_2|$ se říká **excentricita (výstřednost)**. Velikost hlavní poloosy a, velikost vedlejší poloosy b a excentricita e splňují rovnici

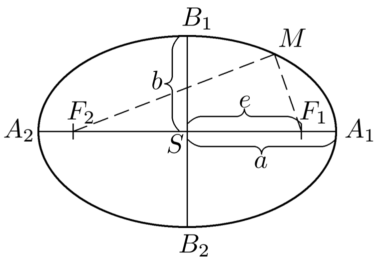
$$\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$$

Elipsa se středem $S = [x_0, y_0]$, s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b má rovnici

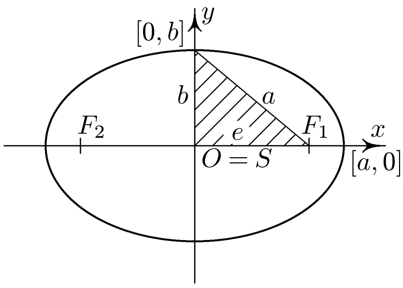
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, a > b > 0} \tag{6.8}$$

Je-li střed $S = [0, 0]$ (viz obr. 6.6), elipsa má rovnici

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0} \tag{6.9}$$



Obr. 6.5



Obr. 6.6

Poznámky:

- Z definice elipsy je zřejmé, že elipsa daná rovnicí (6.9) má hlavní osu totožnou s osou x (ohniska leží na ose x).
- Je-li v rovnici $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a=b,\ a,b\in\mathbf{R}^+,$ pak tato rovnice popisuje kružnici s poloměrem a a středem v počátku.

Tečna k elipse s rovnicí (6.8) a s bodem dotyku $T=[x_1,y_1]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{b^2}=1}$$

Je-li střed $S=[0,0]$, tj. v případě elipsy s rovnicí (6.9), má tečna rovnici

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1}$$

6.8. Hyperbola. Hyperbola je křivka (viz obr. 6.7), jejíž všechny body mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od dvou různých pevně zvolených bodů. Tyto body se označují F_1, F_2 a nazývají se **ohniska hyperboly**. Absolutní hodnota rozdílu vzdáleností $||F_1M|-|F_2M||$, kde M je libovolný bod hyperboly, se označuje $2a$; zřejmě $a\in\mathbf{R}^+$, $2a<|F_1F_2|$. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed hyperboly**. Přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa** a kolmice k ní vedená středem S se nazývá **vedlejší osa** hyperboly. Průsečíky hyperboly s její hlavní osou, body A_1, A_2, se nazývají **vrcholy** hyperboly. Úsečky SA_1, SA_2 jsou tzv. **hlavní poloosy**; pro jejich délku platí vztah $|SA_1|=|SA_2|=a$. (Často se hlavní poloosou nazývá též číslo a.) Vzdálenost $e=|SF_1|=|SF_2|$ se nazývá **excentricita (výstřednost)** hyperboly. **Vedlejší poloosy** jsou úsečky SB_1, SB_2, kde body B_1 a B_2 jsou jediné body na vedlejší ose hyperboly, jejichž vzdálenost od bodů A_1 a A_2 je rovna e. (I pod vedlejší poloosou se často rozumějí nejen úsečky SB_1, SB_2, ale i jejich velikost.) Velikost b vedlejší poloosy splňuje rovnici

$$\boxed{e^2=a^2+b^2}$$

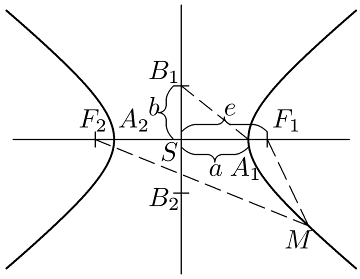
Jestliže $a=b$, **hyperbola** se nazývá **rovnoosá**.

Hyperbola se středem $S=[x_0,y_0]$, s hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b má rovnici

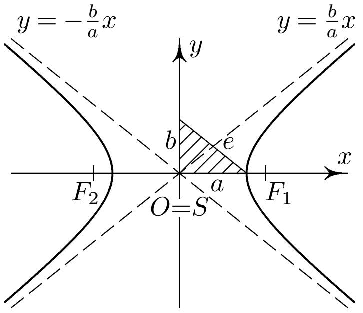
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ a,b\in\mathbf{R}^+} \tag{6.10}$$

Je-li střed $S=[0,0]$ (viz obr. 6.8 a), hyperbola má rovnici

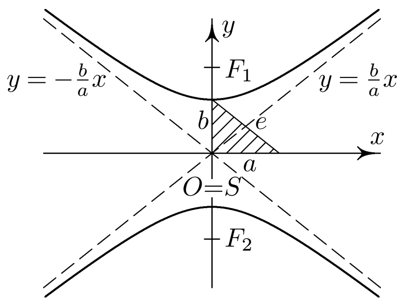
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b\in\mathbf{R}^+} \tag{6.11}$$



Obr. 6.7



Obr. 6.8 a



Obr. 6.8 b

Poznámky:

- Z definice hyperboly je zřejmé, že hyperbola daná rovnicí (6.11) má hlavní osu totožnou s osou x (ohniska leží na ose x).
- Hyperbola, která má střed $S = [0, 0]$, hlavní osu totožnou s osou y (ohniska leží na ose y), hlavní poloosu b , vedlejší poloosu a , má rovnici $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (viz obr. 6.8 b).

Tečna k hyperbole s rovnicí (6.10) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1}$$

Je-li střed $S = [0, 0]$, tj. v případě hyperboly s rovnicí (6.11), má tečna rovnici

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.}$$

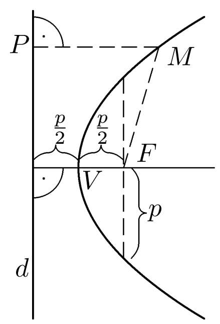
Asymptoty hyperboly jsou přímky, které procházejí jejím středem a svírají s její hlavní osou úhel α , kde $\operatorname{tg} \alpha = \pm\dfrac{b}{a}$. Asymptoty hyperboly s rovnicí (6.10) mají rovnice

$$\boxed{y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)}$$

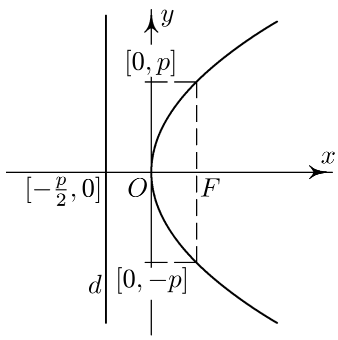
a asymptoty hyperboly s rovnicí (6.11) mají rovnice

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x\,.}$$

6.9. Parabola. Parabola je křivka (viz obr. 6.9), jejíž každý bod je stejně vzdálen od daného bodu F, zvaného **ohnisko** paraboly, a od dané přímky d , zvané **řídící přímka** paraboly. Je-li tedy M libovolný bod paraboly a P je jeho pravoúhlý průmět na řídící přímku, platí rovnost $|FM| = |PM|$. Vzdálenost ohniska F od řídící přímky se nazývá **parametr** paraboly a značí se p; je tedy $p \in \mathbf{R}^+$. (Někdy se parametrem paraboly rozumí číslo $2p$ a číslo p se nazývá **poloparametrem** paraboly.) Kolmice k řídící přímce procházející ohniskem F se nazývá **osa paraboly** a její průsečík s parabolou, bod V, se nazývá **vrchol** paraboly. Pro vrchol V platí vztah $|VF| = \dfrac{p}{2}$.



Obr. 6.9



Obr. 6.10

Parabola s vrcholem $V = [x_0, y_0]$ a s ohniskem $F = [\dfrac{p}{2} + x_0,\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), p \in \mathbf{R}^+} \tag{6.12}$$

Je-li vrchol $V = [0, 0]$ a ohnisko $F = \left[\dfrac{p}{2}, 0\right]$ (viz obr. 6.10), parabola má rovnici

$$\boxed{y^2 = 2px,\ p \in \mathbf{R}^+} \tag{6.13}$$

Poznámka: Parabola s vrcholem v počátku a s ohniskem ležícím na záporné poloose x, resp. na kladné poloose y, resp. na záporné poloose y má rovnici

$$y^2 = -2px\,, \quad \text{resp.} \quad x^2 = 2py\,, \quad \text{resp.} \quad x^2 = -2py\,, p \in \mathbf{R}^+.$$

Tečna k parabole s rovnicí (6.13) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$\boxed{p(x + x_1) = yy_1}$$

Tečnu k parabole s rovnicí (6.12) lze z této rovnice odvodit posunutím soustavy souřadnic.

Poznámky:

- Rovnice (6.6) až (6.11) se nazývají středové rovnice.
- Rovnice (6.12) a (6.13) se nazývají vrcholové rovnice.
- Rovnice (6.7), (6.9), (6.11), (6.13) se nazývají rovnice v základní poloze.
- Rovnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}$ a alespoň jedno z čísel A, B je nenulové, může vyjadřovat některou z kuželoseček daných rovnicemi (6.6) až (6.13), pokud lze tuto rovnici algebraickými úpravami převést na některý z uvedených tvarů.
- Rovnice $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, kde $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$, $C \neq 0$ a alespoň jedno z čísel A, B je nenulové, může vyjadřovat kuželosečku, která nemá osy (pro parabolu osu) rovnoběžné ani totožné s osami souřadnic. Vyšetřování kuželoseček v této poloze není v osnovách střední školy.

- Vzájemnou polohu přímky a kuželosečky vyšetřujeme tak, že hledáme jejich společné body řešením soustavy jejich rovnic.
- Společné body dvou kuželoseček hledáme řešením soustavy jejich rovnic.

6.10. Řešené příklady.

Ve všech následujících úlohách předpokládáme, že souřadnice bodů a vektorů jsou dány v kartézské soustavě souřadnic.

1. Vypočtěte výšku v_a trojúhelníku ABC s vrcholy $A=[5,2]$, $B=[1,5]$, $C=[-2,1]$.

   Řešení: Výšku v_a vypočteme jako vzdálenost vrcholu A od přímky BC, jejíž rovnice podle vzorce (6.4) je
   $$y-5=\frac{1-5}{-2-1}(x-1)\,,\quad \text{tj. po úpravě}\quad 4x-3y+11=0\,.$$
   Pak podle vzorce (12.4) $v_a=\dfrac{|4\cdot 5-3\cdot 2+11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{25}{5}=5\,.$

2. Napište rovnici přímky l tak, aby se souřadnými osami vytvořila trojúhelník o obsahu $P=3$ a procházela bodem $A=[4,-3]$.

   Řešení: Je-li
   $$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$
   úseková rovnice přímky l, potom platí vztahy
   $$2P=pq=6\,,\quad \frac{4}{p}-\frac{3}{q}=1\,.$$
   Druhou rovnici upravíme na tvar $4q-3p=pq$, vypočteme z ní $q=\dfrac{1}{4}(3p+6)$ a dosadíme do první rovnice. Dostaneme kvadratickou rovnici
   $$3p^2+6p-24=0\,,$$
   z níž plyne $p_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+8}$, a tedy $p_1=-4$, $q_1=-\dfrac{3}{2}$ nebo $p_2=2$, $q_2=3$. Úloze tedy vyhovují dvě přímky:
   $$l_1\colon\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1\,,\quad \text{tj.}\quad 3x+8y+12=0\,;$$
   $$l_2\colon\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\,,\quad \text{tj.}\quad 3x+2y-6=0\,.$$

3. Určete průsečík M a odchylku přímek
   $$a\colon 2x-y-6=0\,,\quad b\colon x-y+3=0\,.$$
   Řešení: Souřadnice průsečíku M vyhovují soustavě dvou lineárních rovnic
   $$2x-y-6=0\,,\quad x-y+3=0\,,$$
   z níž plyne $x=9$, $y=12$, tj. $M=[9,12]$.

   Odchylku α daných přímek určíme pomocí vzorce (6.5). Protože směrnice k_a, k_b přímek a, b jsou $k_a=2$, $k_b=1$, dostaneme
   $$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_a-k_b}{1+k_a\cdot k_b}\right|=\left|\frac{2-1}{1+2\cdot 1}\right|=\frac{1}{3}\,,$$
   a tedy $\alpha\doteq 18^\circ 26'$.

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-4, 3]$ a má od počátku vzdálenost $v = 5$.

Řešení: Ze zadání úlohy plyne, že hledanou přímku lze vyjádřit rovnicí tvaru (6.1). Odtud a ze vzorce (6.4) pro vzdálenost přímky od bodu plyne, že p, q musí splňovat rovnice

$$4k + 3 - q = 0\,, \quad 5 = \frac{|q|}{\sqrt{k^2+1}}\,.$$

Z první rovnice dosadíme do druhé $q = 4k + 3$ a po umocnění dostaneme kvadratickou rovnici $9k^2 - 24k + 16 = 0$, která má jediné řešení $k = \dfrac{4}{3}$. Tedy $q = \dfrac{16}{3} + 3 = \dfrac{25}{3}$.

Hledaná přímka má rovnici $y = \dfrac{1}{3}(4x + 25)$, neboli $4x - 3y + 25 = 0$.

Poznámka. Všimneme-li si, že vzdálenost bodu A od počátku je rovna 5, potom můžeme okamžitě usoudit, že hledaná přímka musí být kolmá na přímku OA a musí mít tedy podle vzorce (6.5) směrnici $k = \dfrac{4}{3}$. Úsek q pak dostaneme dosazením souřadnic bodu A do rovnice $y = \dfrac{4}{3}x + q$.

5. Určete střed S a poloměr r kružnice

$$k\colon 2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 10\,.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.6)

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 2x) + 2(y^2 + 6y) &= 10 \\ (x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) &= \ \ 5 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 - 1 - 9 &= \ \ 5 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 &= 15 \end{aligned}$$

Odtud $S = [1, -3]$, $r = \sqrt{15}$.

6. Určete rovnici kružnice k, která má střed v bodě $S = [1, 3]$ a dotýká se přímky p dané rovnicí $7x + y = 0$. Určete bod dotyku.

Řešení: Poloměr hledané kružnice je roven vzdálenosti bodu S od přímky p, takže podle vzorce (6.4) je

$$r = \frac{|7x_S + y_S|}{\sqrt{49+1}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \sqrt{2}\,.$$

Kružnice k má tedy rovnici $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$.

Bod dotyku T určíme třeba jako průsečík přímky p s přímkou l, která prochází bodem S a je kolmá na p. Ze vzorce (6.4) a podmínky kolmosti dvou přímek plyne, že přímka l má rovnici $y - 3 = \dfrac{1}{7}(x-1)$, tj. po úpravě $x - 7y + 20 = 0$. Souřadnice bodu T tedy získáme řešením soustavy

$$x - 7y + 20 = 0\,, \quad 7x + y = 0\,.$$

Této soustavě vyhovují $x = -\dfrac{2}{5}$, $y = \dfrac{14}{5}$ a tedy $T = \left[-\dfrac{2}{5}, \dfrac{14}{5}\right]$.

Poznámka: Souřadnice bodu T bychom mohli získat též řešením nelineární soustavy rovnic:

$$y + 7x = 0\,, \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 0\,.$$

7. Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$, které procházejí bodem $P = [-2, 5]$.

Řešení: Rovnici kružnice uvedeme na tvar (6.6); dostaneme rovnici

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 5$$

a tedy střed kružnice $S=[3,5]$ a poloměr $r=\sqrt{5}$. Snadno je vidět, že žádná tečna t nemůže být rovnoběžná s osou y, a proto má rovnici tvaru $y=kx+q$. Protože vzdálenost středu S od tečny je rovna $r=\sqrt{5}$, z podmínky $P\in t$ a ze vzorce (6.4) plyne, že platí rovnice

$$2k+5-q=0\,,\qquad \sqrt{5}=\frac{|3k-5+q|}{\sqrt{k^2+1}}\,.$$

Z první rovnice dosadíme $q=2k+5$ do druhé rovnice a po umocnění a úpravě dostaneme rovnici $20k^2=5$, z níž plyne $k_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, a tedy $q_1=6$, $q_2=4$. Úloha má tedy dvě řešení

$$\begin{aligned} t_1\colon y&=\ \ \frac{x}{2}+6\,,\quad \text{tj.}\quad x-2y+12=0;\\ t_2\colon y&=-\frac{x}{2}+4\,,\quad \text{tj.}\quad x+2y-\ \ 8=0\,.\end{aligned}$$

Poznámka: Tuto úlohu jsme mohli řešit též tak, že bychom nejprve našli bod dotyku $T=[x_0,y_0]$, jehož souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$(x_0-3)^2+(y_0-5)^2=5\,,\quad (-2-3)(x_0-3)+(5-5)(y_0-5)=5\,.$$

(První rovnice vyjadřuje, že bod T je bodem dané kružnice, druhá, že bod P je bodem tečny kružnice.) Z druhé rovnice okamžitě plyne $x_0-3=-1$, tj. $x_0=2$, což po dosazení do první rovnice dává rovnici $(y_0-5)^2=4$, z níž plyne $y_{01}=7$, $y_{02}=3$. Body $P=[-2,5]$, $T_1=[2,7]$ určují podle (6.3) tečnu t_1 a body P, $T_2=[2,3]$ určují tečnu t_2.

8. Určete střed S a poloosy a, b elipsy

$$2x^2+4y^2+2x-12y+\frac{1}{2}=0\,.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.8):

$$2(x^2+x)+4(y^2-3y)=-\frac{1}{2}\,,\quad 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9\,,$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=1\,.$$

Výsledek: $S=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{3}{2}$.

9. Napište rovnici elipsy se středem v počátku, která má jedno ohnisko v bodě $F_1=[4,0]$ a prochází bodem $M=[3,1]$.

Řešení: Protože $e=|OF_1|$, je $e=4$. Bod M je bodem elipsy, proto do rovnice (6.9) dosadíme souřadnice bodu M. Dále použijeme vztah $e^2=a^2-b^2$, kde $e=4$; odtud $a^2=16+b^2$ a dostaneme rovnici

$$\frac{9}{16+b^2}+\frac{1}{b^2}=1\,,\quad \text{tj. po úpravě}\quad b^4+6b^2-16=0\,.$$

Odtud $b^2=2$ (druhé řešení $b^2=-8$ nevyhovuje) a $a^2=18$. Elipsa se zadanými vlastnostmi má tedy rovnici

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1\iff x^2+9y^2-18=0\,.$$

10. Určete odchylku asymptot hyperboly
$$x^2 - 3y^2 - 2x - 6y - 38 = 0\,.$$
Řešení: Nejprve danou rovnici uvedeme na tvar (6.10):
$$(x-1)^2 - 3(y+1)^2 = 38 + 1 - 3 = 36\,, \quad \frac{(x-1)^2}{6^2} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1\,,$$
$$a = 6\,,\ b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,.$$
Protože směrnice asymptot hyperboly jsou $\pm\frac{b}{a}$, jedna asymptota má směrnici $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a druhá má směrnici $k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Jejich odchylka α je podle vzorce (6.5) dána vztahem
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}\,,$$
a tedy $\alpha = 60°$.

11. Najděte rovnici hyperboly procházející bodem $A = [12, 3\sqrt{3}]$, mají-li její asymptoty rovnice $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Řešení: Protože střed hyperboly je totožný s průsečíkem jejích asymptot, hledaná hyperbola má střed v počátku a má tedy rovnici tvaru (6.11) a její asymptoty mají směrnici $\pm\frac{b}{a}$. Ze zadání úlohy proto plyne, že a, b splňují rovnice
$$\frac{12^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1\,, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2}\,.$$
Z druhé rovnice dosadíme $a = 2b$ do první rovnice a postupně dostaneme:
$$\frac{144}{4b^2} - \frac{27}{b^2} = 1\,, \quad \frac{36}{b^2} - \frac{27}{b^2} = 1\,, \quad b^2 = 9\,.$$
Odtud $b = 3$ (je $b > 0$) a $a = 6$.

Hledaná hyperbola má tedy rovnici $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

12. Hyperbola má střed $S = [-15, 0]$, jedno ohnisko v počátku a na ose y vytíná tětivu délky 32. Najděte rovnici přímky, na níž leží tětiva.

Řešení: Protože střed a jedno ohnisko hyperboly leží na ose x, jednou osou hyperboly je osa x a druhá osa je rovnoběžná s osou y. Odtud plyne, že hyperbola má rovnici tvaru
$$\frac{(x+15)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
a že tětiva, kterou hyperbola vytíná na ose y, je kolmá k ose x a je půlena ohniskem ležícím v počátku soustavy souřadnic. Hyperbola proto prochází bodem $A = [0, 16]$, což znamená, že musí platit rovnice
$$\frac{(0+15)^2}{a^2} - \frac{16^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{225}{a^2} - \frac{256}{b^2} = 1\,.$$
Protože z polohy ohniska a středu plyne pro excentricitu $e = 15$, musí platit rovnice $15^2 = a^2 + b^2$. Zbývá tedy vyřešit soustavu rovnic
$$a^2 + b^2 = 225\,, \quad \frac{225}{a^2} - \frac{256}{b^2} = 1\,.$$

Dosadíme-li z první z těchto rovnic $b^2 = 225 - a^2$ do druhé rovnice, dostaneme postupně

$$\frac{225}{a^2} - \frac{256}{225 - a^2} = 1\,, \quad a^4 - 706a^2 + 225^2 = 0\,,$$
$$a^2 = 353 \pm \sqrt{353^2 - 225^2} = 378 \pm 272\,.$$

Odtud plyne $a^2 = 81$, neboť musí být $b^2 = 225 - a^2 > 0$, a dále $b^2 = 144$.

Hledaná rovnice je $\dfrac{(x+15)^2}{81} - \dfrac{y^2}{144} = 1.$

13. Určete souřadnice vrcholu, parametr, souřadnice ohniska, osu a řídící přímku paraboly

$$y^2 - 4y + 2x - 8 = 0\,.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.12):

$$(y-2)^2 = -2(x-6)\,.$$

Odtud ihned plyne: vrchol paraboly $V = [6, 2]$, parametr $p = 1$, ohnisko $F = [\frac{11}{2}, 2]$. Dále odtud vyplývá, že osou paraboly je přímka $y = 2$ a řídící přímkou přímka $x = 6,5$. Konečně odtud plyne, že osu x parabola protíná v bodě $[4, 0]$ a osu y v bodech $[0, 2 \pm 2\sqrt{3}]$.

14. Určete q tak, aby přímka $y = 4x + q$ byla tečnou paraboly

$$y = -x^2 - 2x + 3\,.$$

Určete bod dotyku.

Řešení: Souřadnice bodu dotyku vyhovují rovnici přímky i rovnici paraboly, tj. rovnicím

$$y = 4x + q\,, \quad y = -x^2 - 2x + 3\,,$$

z nichž vyloučením y dostaneme rovnici

$$4x + q = -x^2 - 2x + 3\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 + 6x + q - 3 = 0\,.$$

Protože přímka $y = 4x + q$ má být tečnou, tato kvadratická rovnice musí mít jediné řešení, tj. její diskriminant $D = 6^2 - 4 \cdot (q - 3)$ musí být nulový. Musí tedy být $q = 12$. Je-li tato podmínka splněna, kvadratická rovnice má řešení $x = -3$, jemuž přísluší $y = 0$. Přímka $y = 4x + 12$ se tedy dotýká paraboly v bodě $T = [-3, 0]$.

15. Určete vzdálenost d dvou rovnoběžek t, p, kde t je tečna paraboly $y^2 = 64x$ a p má rovnici $4x + 3y + 46 = 0$.

Řešení: Přímka p má směrnici $k_p = -\frac{4}{3}$ a tedy tečna s ní rovnoběžná má rovnici $y = -\frac{4}{3}x + q$. Úsek q určíme stejným postupem jako v předešlém příkladě; dostaneme $q = -12$, takže tečna má rovnici $4x + 3y + 36 = 0$. Vzdálenost d tečny a přímky p určíme jako vzdálenost libovolně zvoleného bodu X tečny od přímky p; můžeme např. zvolit $X = [-9, 0]$ a podle vzorce (6.4) dostaneme

$$d = \frac{|-4 \cdot 9 + 3 \cdot 0 + 46|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2\,.$$

6.11. Neřešené příklady.

1. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ s vrcholy $A = [4, 6]$, $B = [-4, 0]$, $C = [-1, -4]$.

- Najděte rovnice všech jeho stran.
  $[3x-4y+12=0\,;\ 4x+3y+16=0\,;\ 2x-y-2=0]$
- Najděte rovnici těžnice jdoucí vrcholem C. $[7x-y+3=0]$
- Najděte rovnici výšky spuštěné z vrcholu A. $[3x-4y+12=0]$

2. Určete odchylku přímek $5x-y+7=0$, $2x-3y+1=0$. $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

3. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A=[-5,2]$ a je kolmá na přímku $4x-y+3=0$. $[x+4y-3=0]$

4. Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice dané rovnicí $x^2+y^2-6x+4y-12=0$. $[S=[3;-2]\,,r=5]$

5. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $K=[3,0]$ a dotýká se přímky $y=2x$ v bodě $T=[1,2]$. $\left[\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{20}{9}\right]$

6. Určete rovnici tečny kružnice $x^2+y^2=65$, která je kolmá k přímce $3x-2y+9=0$. $\left[2x+3y\pm 13\sqrt{5}=0\right]$

7. Určete středovou rovnici elipsy, která prochází bodem $A=\left[4;2\sqrt{2}\right]$, má ohnisko $F=[4;0]$ a střed $S=[0;0]$. $\left[\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1\right]$

8. Je dána elipsa $4x^2+25y^2-24x-100y+36=0$. Určete souřadnice jejího středu, délky poloos a excentricitu. $[S=[3,2]\,;\ a=5\,,\ b=2\,;\ e=\sqrt{21}]$

9. Určete průsečíky elipsy $x^2+4y^2+8x-8y+4=0$ s přímkou $3x-2y+2=0$. $\left[P_1=[0,1]\,,\ P_2=\left[-\frac{4}{5},\frac{-1}{5}\right]\right]$

10. Určete střed, ohniska, délky poloos a rovnice asymptot hyperboly $x^2-4y^2+6x+5=0$.

    $[S=[-3,0]\,;\ a=2\,,\ b=1\,;\ F_{1,2}=[-3\pm\sqrt{5},0]\,;x\pm 2y+3=0]$

11. Napište rovnici tečny paraboly $y^2+3x+4y-8=0$ rovnoběžné s přímkou $x+4y-4=0$. $[x+4y-8=0]$