4. Goniometrie

Nejprve si připomeňme z geometrie pojem orientovaného úhlu a jeho velikosti.

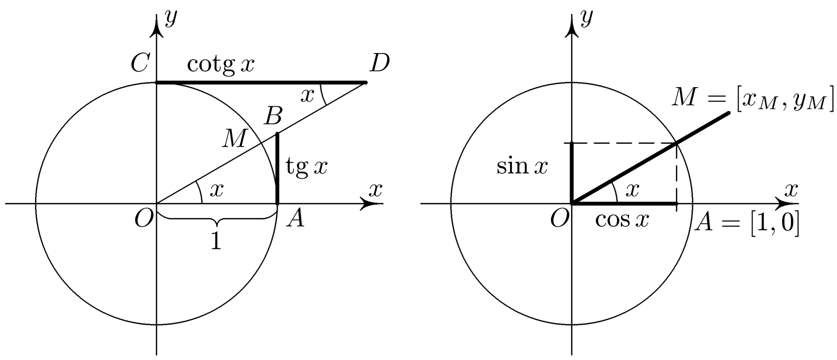
4.1. Orientovaný úhel a jeho velikost. Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. První z těchto polopřímek nazýváme **počátečním ramenem orientovaného úhlu** a druhou nazýváme **koncovým ramenem orientovaného úhlu**. Společný počátek obou ramen se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB označíme $\widehat{AVB}$; podle definice je tedy $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$. **Nulový orientovaný úhel** je orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, kde polopřímky VA, VB jsou identické.

Budiž dán orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Polopřímky VA, VB dělí rovinu na dva neorientované úhly. Označíme-li jejich velikosti α, β, platí $\alpha + \beta = 360°$ (v míře stupňové), resp. $\alpha + \beta = 2\pi$ radiánů (v míře obloukové). Radián (značíme rad) je velikost středového úhlu, který přísluší oblouku kružnice, jehož délka je rovna poloměru kružnice. Platí 1 rad $\doteq 57°17'45''$. **Velikostí orientovaného úhlu** $\widehat{AVB}$ nazýváme každé reálné číslo tvaru $\alpha + 2k\pi$ (v míře obloukové), resp. každé reálné číslo tvaru $\alpha + k \cdot 360°$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbf{Z}$ a

- $\alpha = 0$, resp. $\alpha = 0°$, jsou-li polopřímky VA, VB identické,
- α je velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček), nejsou-li polopřímky VA, VB identické.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$; číslo α se nazývá **základní velikost orientovaného úhlu**.

4.2. Goniometrické funkce obecného úhlu. Zvolme v rovině kladně orientovanou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem O, osami x, y a stejnou délkovou jednotkou na obou osách; předpoklad, že soustava je kladně orientovaná, znamená, že orientovaný úhel, jehož počátečním ramenem je kladná poloosa x a koncovým ramenem je kladná poloosa y, má základní velikost $\frac{\pi}{2}$ (v obloukové míře). Na kladné poloose x zvolme bod $A = [1, 0]$ a kolem počátku opišme kružnici o poloměru jedna, tzv. jednotkovou kružnici. Každému reálnému číslu x nyní můžeme přiřadit právě jeden orientovaný úhel, jehož počátečním ramenem je polopřímka OA; je to tzv. **orientovaný úhel velikosti x v základní poloze**. Průsečík koncového ramene tohoto orientovaného úhlu s jednotkovou kružnicí označme $M = [x_M, y_M]$. Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou nyní definovány takto (viz obr. 4.1):



Obr. 4.1

$$\sin x = y_M\,, \quad x \in \mathbf{R}; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y_M}{x_M}\,, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\cos x = x_M\,, \quad x \in \mathbf{R}; \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x_M}{y_M}\,, \quad x \neq k\pi, k \in Z$$

Z definice je zřejmé, že **goniometrické funkce jsou periodické**: základní perioda T funkcí sinus a kosinus je rovna 2π a základní perioda funkcí tangens a kotangens je rovna π. To znamená, že platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+2k\pi) &= \sin x\,, && x\in\mathbf{R}\,,\ k\in\mathbf{Z},\\ \cos(x+2k\pi) &= \cos x\,, && x\in\mathbf{R}\,,\ k\in\mathbf{Z},\\ \operatorname{tg}(x+k\pi) &= \operatorname{tg} x\,, && x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k\in\mathbf{Z},\\ \operatorname{cotg}(x+k\pi) &= \operatorname{cotg} x\,, && x\neq k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}. \end{aligned}}$$

Funkce sinus, kosinus jsou kromě toho antiperiodické se základní antiperiodou π, tj. pro každé $x\in\mathbf{R}$ platí vztahy:

$$\boxed{\sin x = -\sin(x+\pi)\,,\quad \cos x = -\cos(x+\pi)}$$

Funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché, zatímco funkce kosinus je sudá. To znamená, že platí

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(-x) = -\sin x\,,\quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\,,\quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x\,,\quad \cos(-x)=\cos x,\\ \text{kdykoliv má jedna strana rovnice smysl}\end{gathered}}$$

Z definice goniometrických funkcí plynou ještě tyto jejich vlastnosti:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\ \operatorname{cotg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \end{aligned}}$$

4.3. Monotónie a znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

	Kvadrant			
	I	II	III	IV
$\sin x$	roste $+$	klesá $+$	klesá $-$	roste $-$
$\cos x$	klesá $+$	klesá $-$	roste $-$	roste $+$
$\mathrm{tg}\, x$	roste $+$	roste $-$	roste $+$	roste $-$
$\mathrm{cotg}\, x$	klesá $+$	klesá $-$	klesá $+$	klesá $-$
	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
	Interval			

Goniometrické funkce jsou ve skutečnosti monotónní na větších intervalech. Pro každé celé číslo k totiž platí:

- Funkce sinus roste od -1 do $+1$ na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ a klesá od $+1$ do -1 na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$.

- Funkce kosinus klesá od $+1$ do -1 na intervalu $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ a roste od -1 do $+1$ na intervalu $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$.

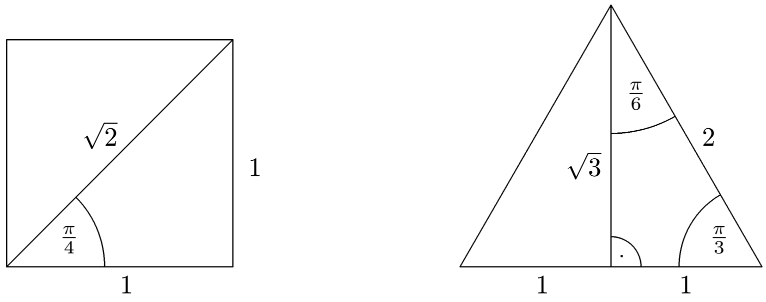
- Funkce tangens roste od $-\infty$ do $+\infty$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

- Funkce kotangens klesá od $+\infty$ do $-\infty$ na intervalu $(k\pi, \pi + k\pi)$.

4.4. Funkční hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in \mathbf{R}$.

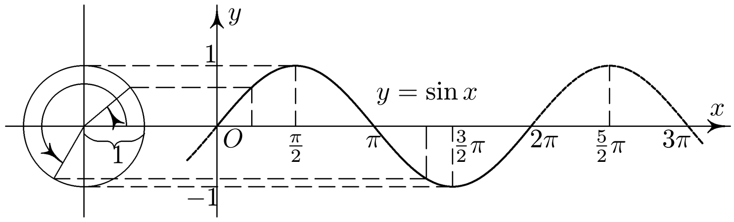
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	0	$*$	0
$\operatorname{cotg} x$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$*$	0	$*$

Znak „ $*$ “ v některých polích tabulky značí, že funkce uvedená v prvním poli řádku není pro hodnotu x uvedenou v prvním poli sloupce definována. Většina hodnot goniometrických funkcí v této tabulce je důsledkem vztahů mezi stranami a úhlopříčkou ve čtverci a vztahů mezi stranami a výškou v rovnostranném trojúhelníku (viz obr. 4.2).

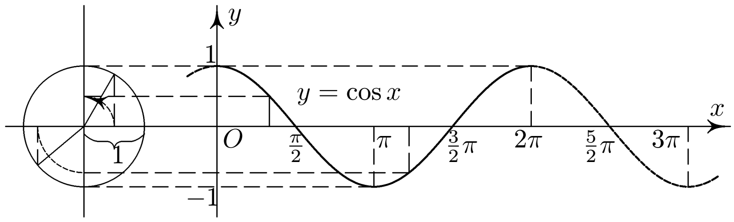


Obr. 4.2

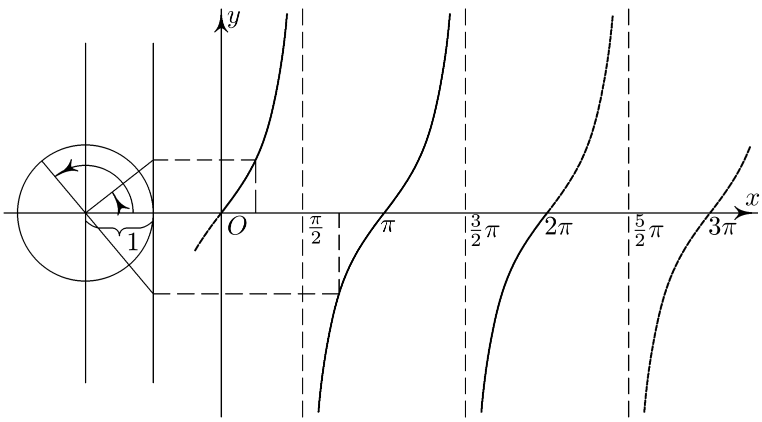
4.5. Grafy goniometrických funkcí.



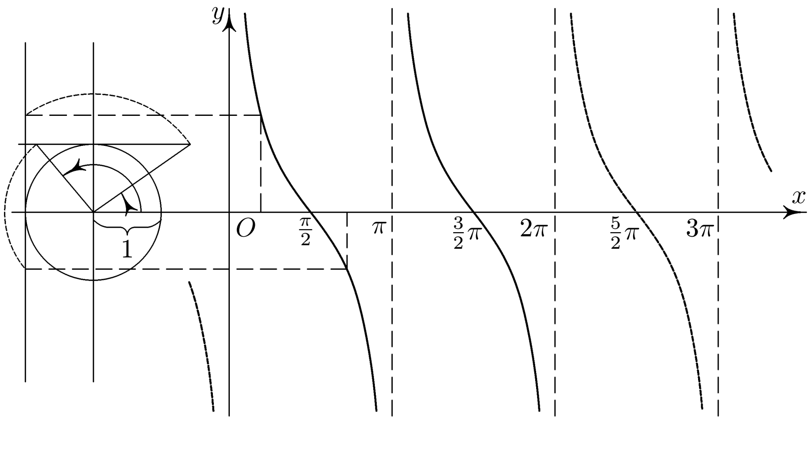
Obr. 4.3: $y = \sin x\,,\ x \in \mathbf{R}\,,\ y \in \langle -1, 1\rangle\,,\ T = 2\pi$



Obr. 4.4: $y = \cos x\,,\ x \in \mathbf{R}\,,\ y \in \langle -1, 1\rangle\,,\ T = 2\pi$



Obr. 4.5: $y = \operatorname{tg} x\,,\ x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\right\},\ y \in \mathbf{R}\,,\ T = \pi$



Obr. 4.6: $y = \operatorname{cotg} x\,,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}\,,\ y \in \mathbf{R}\,,\ T = \pi$

4.6. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

- **Základní vztah**

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \tag{4.1}$$

- **Součtové vzorce**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}} \tag{4.2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \operatorname{cotg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x} \end{aligned}} \tag{4.2'}$$

- **Vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného a polovičního úhlu**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \left|\sin \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \left|\cos \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \end{aligned}} \tag{4.3) – (4.6}$$

- **Součty a rozdíly sinů a kosinů**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}} \tag{4.7}$$

Z těchto vzorců plynou vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}} \tag{4.8}$$

4.7. Užití goniometrických funkcí v geometrii. Základem aplikací goniometrických funkcí v geometrii jsou jednak jejich definice, jednak následující dvě důležité věty platné pro každý trojúhelník se stranami a, b, c a úhly α, β, γ. Přitom, jak je obvyklé, úhel α je protilehlý straně a, úhel β je protilehlý straně b a úhel γ je protilehlý straně c.

- **Věta sinová**

$$\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma} \tag{4.9}$$

- **Věta kosinová**

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \tag{4.10}$$

Přímo z definice sinu plyne, že obsah P obecného trojúhelníka je dán vzorcem

$$\boxed{P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma} \tag{4.11}$$

4.8. Harmonické kmity. V technické praxi se setkáváme s harmonickými kmity (harmonickými veličinami), tj. s kmity (veličinami), jejichž matematickým vyjádřením je funkce tvaru

$$y = A\sin(\omega x + \varphi)\,, \qquad \text{kde } A, \varphi, \omega \in \mathbf{R} \text{ (konstanty)}, x \in \mathbf{R} \text{ (proměnná)}.$$

Konstanty A, φ, ω mají svoje názvy: A je tzv. **amplituda**, ω je tzv. **úhlový kmitočet** nebo též **kruhová frekvence** a φ je tzv. **počáteční fáze** nebo **fázový úhel** nebo též **fázový posun**.

Harmonický kmit je periodická funkce se základní periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Příkladem harmonické veličiny je okamžitá hodnota střídavého napětí nebo okamžitá hodnota střídavého proudu.

4.9. Sestrojení grafu funkce $y = A\sin(\omega x + \varphi)$.

a) Graf funkce $y = A\sin x$, kde $A > 0$, získáme z grafu funkce $y = \sin x$ dilatací ve směru osy y s koeficientem A. To znamená, že všechny úsečky rovnoběžné s osou y A-násobně prodloužíme v případě $A > 1$ a $\dfrac{1}{A}$-násobně zkrátíme v případě $A < 1$. Pro $A < 0$ dostaneme graf souměrný ke grafu funkce $y = -A\sin x$, kde $-A > 0$ podle osy x.

b) Graf funkce $y = \sin\omega x$, kde $\omega > 0$, dostaneme z grafu funkce $y = \sin x$ dilatací ve směru osy x s koeficientem $\dfrac{1}{\omega}$. Je-li $\omega < 0$, pak $\sin\omega x = -\sin|\omega|x$. Graf funkce $y = \sin\omega x$, kde $\omega < 0$, je souměrný ke grafu funkce $y = \sin\omega x$, kde $\omega > 0$ podle osy x.

c) Graf funkce $y = \sin(x + \varphi)$ dostaneme z grafu funkce $y = \sin x$ posunutím ve směru osy x, a to posunutím doleva, je-li $\varphi > 0$, a posunutím doprava, je-li $\varphi < 0$.

Máme-li sestrojit graf funkce $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, použijeme a), b) a c). Jejich pořadí je podrobeno jedné podmínce: b) vždy musí předcházet c). Podobně sestrojíme grafy funkcí $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, $y = A\,\mathrm{tg}(\omega x + \varphi), y = A\,\mathrm{cotg}(\omega x + \varphi)$.

4.10. Řešené příklady.

1. Vypočtěte $\sin^2\dfrac{5}{3}\pi + \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{5}{6}\pi + \mathrm{cotg}\,\dfrac{17}{4}\pi$.

   Řešení:

$$\sin^2\frac{5}{3}\pi + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{cotg}\,\frac{17}{4}\pi = \sin^2\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right) + \sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}\,.$$

2. Zjednodušte $\cos(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x)$.

Řešení: Užitím jednoho ze vzorců (4.7) dostaneme

$$\cos(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x) = -2\sin 45^\circ \sin x = -\sqrt{2}\sin x\,.$$

3. Dokažte vztahy:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right),\\
&\text{b) } \cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).
\end{aligned}$$

Řešení: V obou případech použijeme součtové vzorce (4.2):

a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin x = \\
&= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \cos x + \sin x\,.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\sin x = \\
&= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \cos x - \sin x\,.
\end{aligned}$$

4. Vyjádřete $\sin x$, $\cos x$, znáte-li $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Řešení: Ze vzorců (4.5) a (4.6) plyne $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$. Odtud vypočteme $\cos x$:

$$(1+\cos x)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x\,, \quad \cos x\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right) = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\,,$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\,.$$

K vyjádření $\sin x$ nyní použijeme základní vztah (4.1):

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= 1 - \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\right)^2 \\
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}^4\dfrac{x}{2} - 1 + 2\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg}^4\dfrac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{4\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)^2}\,,
\end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\,.$$

5. Vyjádřete $a\sin x + b\cos x$, kde x je proměnná, $a, b > 0$, ve tvaru $A\sin(x+\varphi)$, kde $A > 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Řešení: Předpokládejme, že je takové vyjádření možné, tj. že existují A a φ s požadovanými vlastnostmi tak, že pro všechna x platí rovnost

$$A\sin(x+\varphi) = a\sin x + b\cos x\,.$$

Levou stranu upravíme s pomocí součtového vzorce, viz (4.2), a dostaneme vztah

$$A\sin x\cos\varphi + A\cos x\sin\varphi = a\sin x + b\cos x\,.$$

Protože tento vztah podle předpokladu platí pro všechna $x \in \mathbf{R}$, platí speciálně pro $x = 0$ a pro $x = \dfrac{\pi}{2}$. Postupným dosazením těchto dvou hodnot proměnné x však dostaneme rovnice

$$A\sin\varphi = b\,, \quad A\cos\varphi = a\,,$$

z nichž plyne (protože $A, a, b > 0$):

$$A^2 = a^2 + b^2\,,\ A = \sqrt{a^2+b^2}\,; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\,.$$

Jelikož náš postup je zřejmě možno obrátit, hledané vyjádření má tvar

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)\ .$$

.

6. Vyjádřete $\sin x\cos 5x$ ve tvaru součtu či rozdílu goniometrických funkcí.

Řešení: Z posledního ze vzorců (4.8) plyne

$$\sin x\cos 5x = \frac{1}{2}\left[\sin(x+5x) + \sin(x-5x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin 6x + \sin(-4x)\right] = \frac{1}{2}\sin(6x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$

7. Nakreslete graf funkce $f(x) = -\dfrac{1}{3}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right)$.

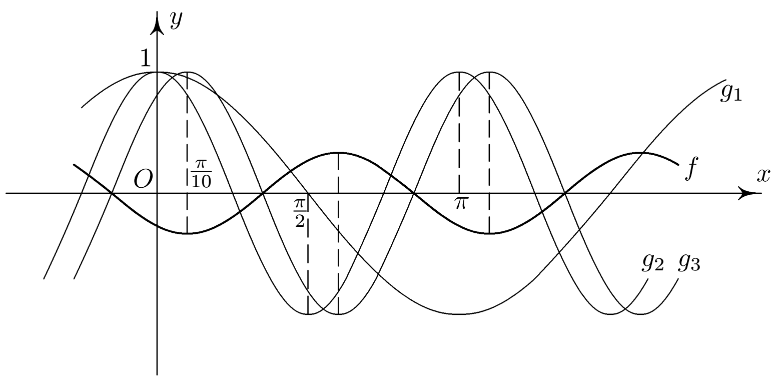
Řešení: Funkční vztah upravíme na ekvivalentní tvar

$$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 2\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$$

a postupně sestrojíme grafy funkcí (viz obr. 4.7)

$$g_1(x) = \cos x\,, \quad g_2(x) = \cos 2x\,, \quad g_3(x) = g_2(x - \frac{\pi}{10})\,,$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}g_3(x)\,.$$



Obr. 4.7

4.11. Neřešené příklady.

Nakreslete grafy goniometrických funkcí:

1. $y = \sin x$; $y = \sin \dfrac{x}{2}$; $y = \sin 2x$; $y = 2\sin x$; $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ [Do jednoho obrázku]
2. $y = 3\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{3}\pi\right)$
3. $y = \dfrac{1}{3}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
4. $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
5. $y = \operatorname{cotg}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Použití gonimetrických funkcí v Matematice 1

Vypočtěte limity:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$
2. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ [2]
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x}$ [0]
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$ [2]
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

Vypočtěte integrály:

1. $\int \sin^2 x \, dx$ $\left[\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c\right]$
2. $\int \sin x \sin 5x \, dx$ $\left[-\dfrac{1}{12}\sin 6x + \dfrac{1}{8}\sin 4x + c\right]$
3. $\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$ $\left[\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + c\right]$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ [2]