2. Funkce a jejich grafy

2.1. Pojem funkce a její vlastnosti. Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** x je taková binární relace z množiny $\mathbf{R}$ do množiny $\mathbf{R}$, že pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje nejvýše jedno $y \in \mathbf{R}$, pro které $[x, y] \in f$. Množinu všech x, pro které existuje právě jedno takové y, nazýváme **definičním oborem funkce** f a značíme D_f. Množinu všech $y = f(x)$, kde $x \in D_f$, nazýváme **oborem hodnot funkce** f a značíme H_f, .

Nechť f je reálná funkce a $J \subset D_f$.

Říkáme, že funkce f je v intervalu $J \subset D_f$

- **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

- **klesající**, pravě když pro všechna $x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

- **neklesající**, pravě když pro všechna $x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

- **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

- **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li f prostá na svém definičním oboru, existuje **inverzní funkce** f^{-1}. Tato funkce je také prostá a platí $D_{f^{-1}} = H_f$, $H_{f^{-1}} = D_f$. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$.

Funkce f, pro kterou platí $x \in D_f \Longleftrightarrow (-x) \in D_f$, se nazývá

- **sudá**, jestliže pro všechna $x \in D_f : f(-x) = f(x)$,

- **lichá**, jestliže pro všechna $x \in D_f : f(-x) = -f(x)$.

Funkce f, která je definovaná v $\mathbf{R}$, se nazývá **periodická**, jestliže existuje $T > 0$ tak, že pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí:

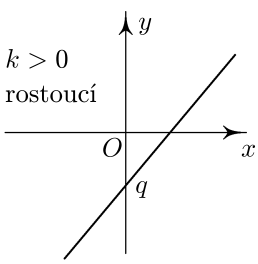
$$x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x + kT) = f(x).$$

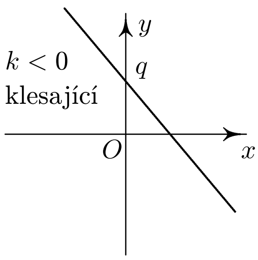
Číslo T se nazývá **perioda funkce** f; nejmenší periodu nazýváme **základní periodou funkce** f.

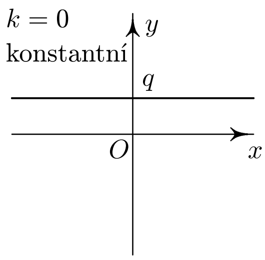
2.2. Lineární funkce. Lineární funkce je funkce daná předpisem:

$$\boxed{y = kx + q, \quad k, q \in \mathbf{R},\ D_f = \mathbf{R}}$$

Grafem je přímka, viz obr. 2.1 a,b,c.







Obr. 2.1 a

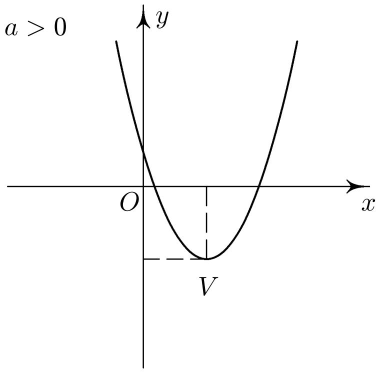
Obr. 2.1 b

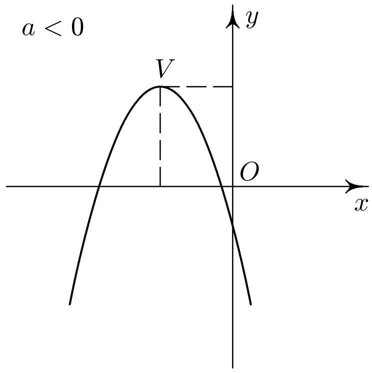
Obr. 2.1 c

2.3. Kvadratická funkce. Kvadratická funkce je funkce daná předpisem:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ D_f = \mathbf{R}}$$

Grafem je parabola s vrcholem $V = \left[-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$, viz obr. 2.2 a, b. Kvadratická funkce není na $\mathbf{R}$ prostá.





Obr. 2.2 a

Obr. 2.2 b

2.4. Lineární lomená funkce. Lineární lomená funkce je funkce daná předpisem

$$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0,\ ad \neq bc,\ D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}}$$

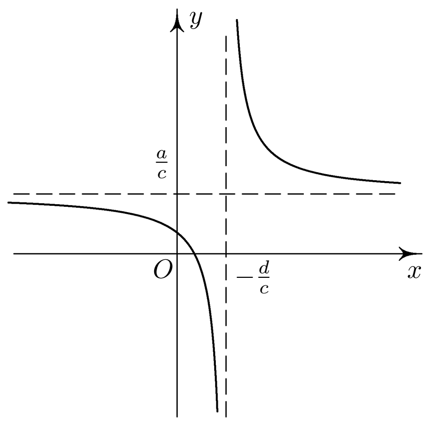
Grafem je hyperbola se středem $S = \left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c} \right]$, viz obr. 2.3. Asymptoty mají rovnice

$$x = -d/c, \quad y = a/c\,.$$

Poznámka. Je-li $ad = bc$, $c \neq 0$, potom existuje k tak, že $a = kc$, $b = kd$, a tedy

$$y = \frac{kcx + kd}{cx+d} = \frac{k(cx+d)}{cx+d} = k$$

je konstantní funkce. Je-li $c = 0$, $d \neq 0$, je $y = (a/d)x + b/d$ lineární funkce.



Obr. 2.3

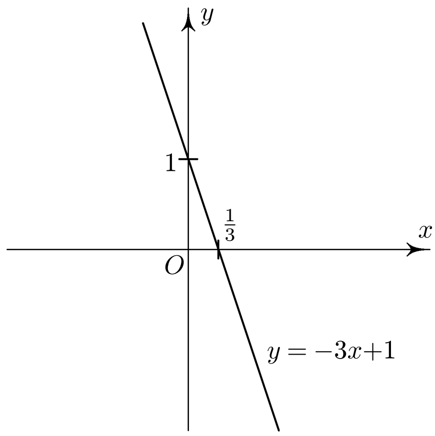
2.5. Řešené příklady.

1. Nakreslete grafy funkcí

$$\text{a) } y = -3x + 1\,, \quad \text{b) } y = |x-1| - |x+1|,$$
$$\text{c) } y = \frac{|x| + x}{x}\,, \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}.$$

Řešení:

a) $y = -3x + 1$: $D_f = \mathbf{R}$ a grafem je přímka, kterou určíme dvěma body, např. průsečíkem $\left[\dfrac{1}{3}, 0\right]$ s osou x a průsečíkem $[0,1]$ s osou y (viz obr. 2.4).

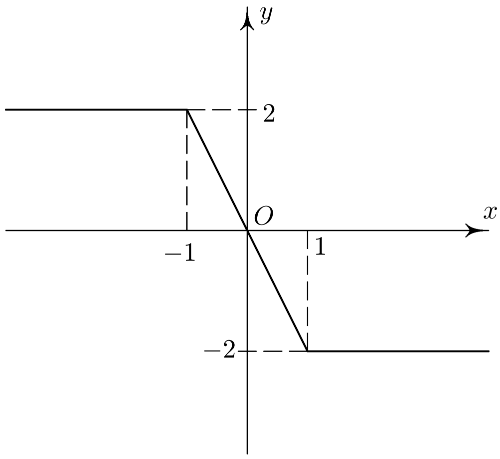


Obr. 2.4

b) $y = |x-1| - |x+1|$: $D_f = \mathbf{R}$; body -1 , 1 dělí D_f na tři intervaly $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 1)$ a $\langle 1, \infty)$ a v každém z těchto intervalů je daná funkce lineární:

$$x \in (-\infty, -1) \Longrightarrow y = -x + 1 + x + 1\,,\ y = 2$$
$$x \in \langle -1, 1) \Longrightarrow y = -x + 1 - x - 1\,,\ y = -2x$$
$$x \in \langle 1, \infty) \Longrightarrow y = x - 1 - x - 1\,,\ y = -2\,.$$

Graf je nakreslen na obr. 2.5.

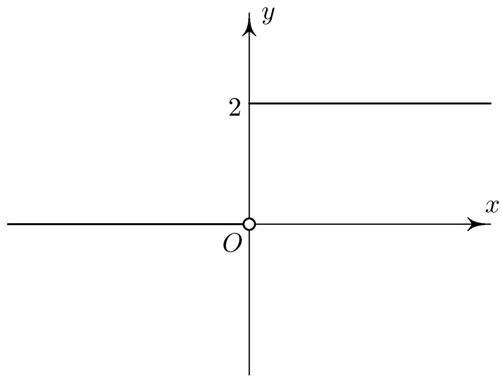


Obr. 2.5

c) $y = \dfrac{|x| + x}{x}$: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; postupujeme stejně jako v případě b) a dostaneme:

$$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow y = \frac{-x + x}{x}\,,\ y = 0$$
$$x \in (0, \infty) \Longrightarrow y = \frac{x + x}{x}\,,\ y = 2$$

Graf je nakreslen na obr. 2.6.



Obr. 2.6

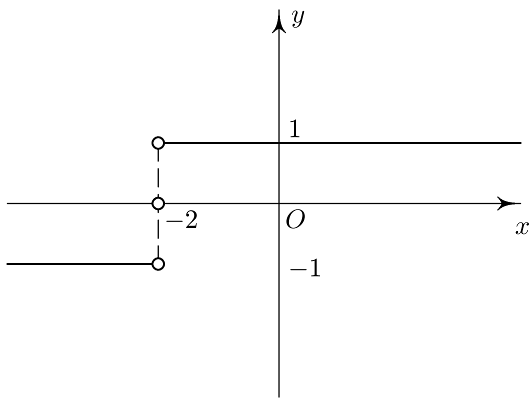
d) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$: Je $x^2+4x+4=(x+2)^2 \geq 0$, a tedy definičním oborem je množina $D_f = \{x; x \in \mathbf{R},\ x+2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Dále je:

$$y = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} = \frac{|x+2|}{x+2}\,,$$

a tedy

$$x \in (-\infty, -2) \Longrightarrow y = \frac{-(x+2)}{x+2}\,,\ y=-1,$$
$$x \in (-2, \infty) \Longrightarrow y = \frac{x+2}{x+2}\,,\ y=1\,.$$

Graf jsou dvě otevřené polopřímky rovnoběžné s osou x (viz obr. 2.7).



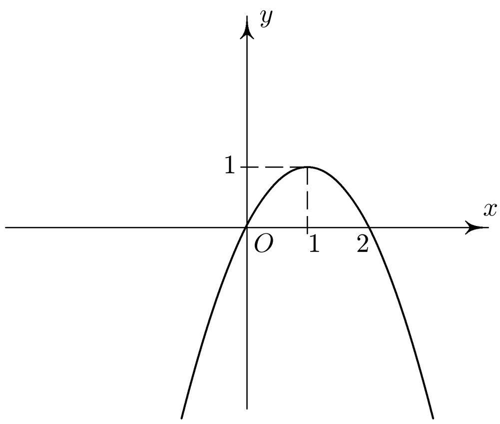
Obr. 2.7

2. Nakreslete grafy funkcí

a) $y = -x^2 + 2x$, b) $y = \left|x^2 - 6x + 1\right|$,
c) $y = x^2 - x|x-2| - 4$, d) $y = |x^2 - 4|x| + 2|$.

Řešení:

a) $y = -x^2 + 2x$: Je $D_f = \mathbf{R}$ a $y = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$. Tedy grafem je parabola s vrcholem $[1,1]$. Dosazením $x = 0$ dostaneme $y = 0$, což znamená, že graf protíná osu y v počátku. Podobně řešením rovnice $y = 0 \iff -(x-1)^2 + 1 = 0$ zjistíme, že průsečíky s osou x jsou body $[0,0]$ a $[2,0]$. Graf je nakreslen na obrázku 2.8.

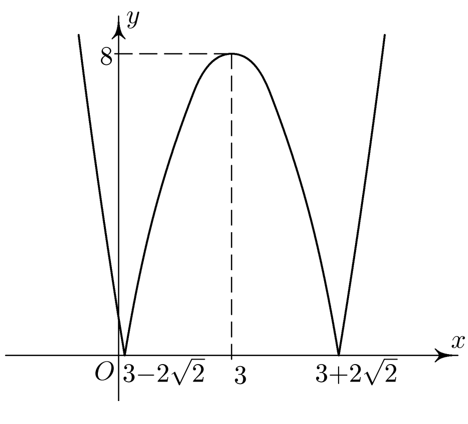


Obr. 2.8

b) $y = |x^2 - 6x + 1|$: Je $D_f = \mathbf{R}$ a rovnice $x^2 - 6x + 1 = 0$ má kořeny $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Tedy

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & = (x-3)^2 - 8 \quad \text{pro } x \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{2}\rangle \cup \langle 3 + 2\sqrt{2}, \infty), \\ -x^2 + 6x - 1 & = 8 - (x-3)^2 \quad \text{pro } x \in (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}). \end{cases}$$



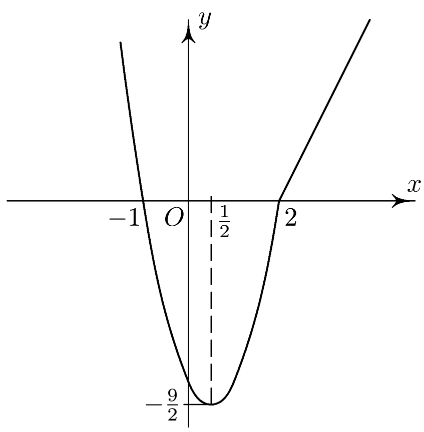
Obr. 2.9

To znamená, že část grafu dané funkce ležící nad intervalem $\langle 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\rangle$ je obloukem paraboly $y = -x^2 + 6x - 1$ a zbývající část je sjednocením dvou oblouků paraboly $y = x^2 - 6x + 1$. Graf (viz obr. 2.9) protíná osu y v bodě $[0,1]$ a osu x v bodech $[3-2\sqrt{2}, 0]$, $[3+2\sqrt{2}, 0]$. Vrchol středního oblouku grafu je v bodě $[3,8]$.

c) $y = x^2 - x|x-2| - 4$: Je $D_f = \mathbf{R}$ a

$$y = \begin{cases} x^2 - x(-x+2) - 4 & = 2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2} \quad \text{pro } x \in (-\infty, 2), \\ x^2 - x(x-2) - 4 & = 2x - 4 \quad \text{pro } x \in \langle 2, \infty). \end{cases}$$

Graf dané funkce (viz obr. 2.10) je tedy sjednocením oblouku paraboly $y = 2x^2 - 2x - 4$ ležícího nad intervalem $(-\infty, 2)$ a polopřímky vycházející z bodu $[2,0]$ a obsahující bod $[4,4]$. Graf obsahuje vrchol oblouku paraboly, kterým je bod $\left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{2}\right]$.



Obr. 2.10

d) $y = |x^2 - 4|x| + 2|$: Funkce je sudá s $D_f = \mathbf{R}$. Graf je tedy souměrný podle osy y, a proto stačí vyšetřit jeho část nad intervalem $\langle 0, \infty)$ – zbývající část získáme pomocí osové souměrnosti.

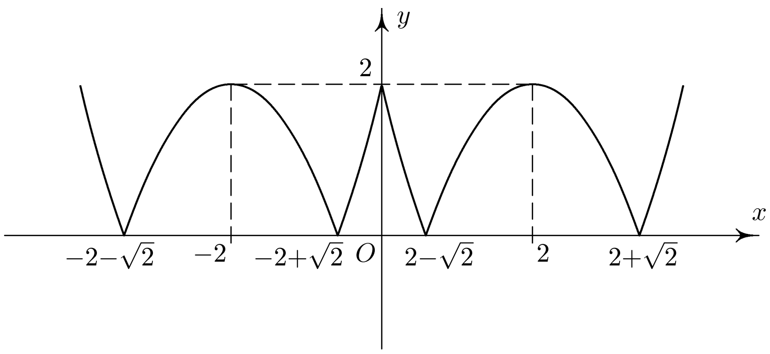
Rovnice $x^2 - 4x + 2 = 0$ má kořeny $2 \pm \sqrt{2}$, takže

$$y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2}),$$

a proto

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & = (x-2)^2 - 2 \quad \text{pro } x \in \langle 0, 2-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{2}, \infty), \\ -x^2 + 4x - 2 & = 2 - (x-2)^2 \quad \text{pro } x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}). \end{cases}$$

Pravá část grafu dané funkce, tj. část ležící nad intervalem $\langle 0, \infty)$, se tedy skládá ze dvou oblouků paraboly $y = x^2 - 4x + 2$ nad intervaly $\langle 0, 2-\sqrt{2}\rangle$ a $\langle 2+\sqrt{2}, \infty)$ a z oblouku paraboly $y = -x^2 + 4x - 2$ nad intervalem $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. Celý graf dané funkce se tedy skládá ze šesti oblouků čtyř různých parabol (viz obr. 2.11). Z obrázku je vidět, že graf obsahuje vrcholy dvou z těchto čtyř parabol.



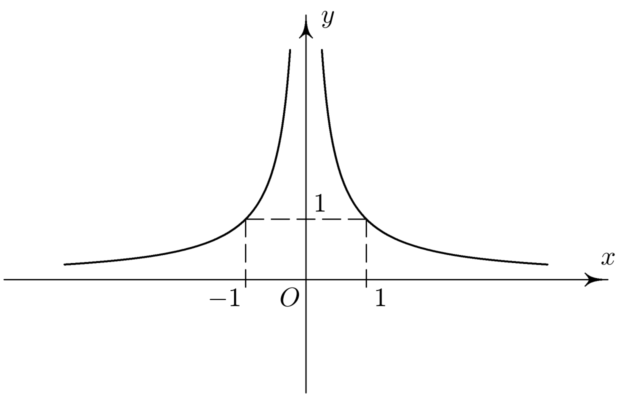
Obr. 2.11

3. Sestrojte grafy funkcí

$$\text{a) } y = \frac{1}{|x|}\,, \qquad \text{b) } y = \frac{4-x}{x+2}\,.$$

Řešení:

a) $y = \dfrac{1}{|x|}$: Funkce je sudá s $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, graf je tedy souměrný podle osy y . Pro $x > 0$ je $y = \dfrac{1}{x}$, a proto graf dané funkce je sjednocením dvou větví dvou různých rovnoosých hyperbol (viz obr. 2.12).



Obr. 2.12

b) $y = \dfrac{4-x}{x+2}$: Je $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Ukážeme, že grafem je hyperbola. Za tímto účelem upravíme algebraický výraz, jímž je funkce definována:

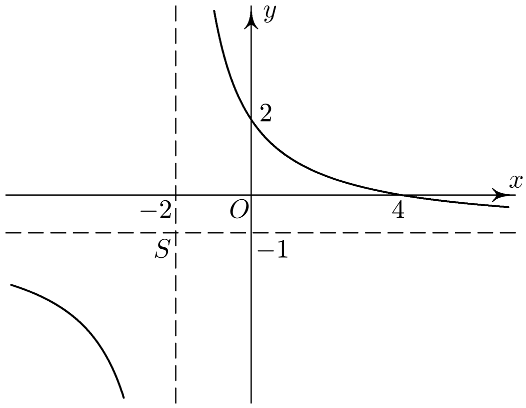
$$y = -\frac{x-4}{x+2} = -\frac{x+2-6}{x+2} = -1 + \frac{6}{x+2}\,.$$

Položíme-li $u = x + 2$ a $v = y + 1$, tj. zavedeme-li nové souřadnice, dostaneme rovnici hyperboly

$$v = \frac{6}{u}\,.$$

Středem hyperboly je počátek nové souřadné soustavy a asymptotami jsou její souřadné osy. Odtud plyne, že v původní souřadné soustavě má střed hyperboly souřadnice $x_0 = -2$,

$y_0 = -1$ a asymptoty mají rovnice $x = -2$, $y = -1$. Průsečíky hyperboly se souřadnými osami x, y jsou body $[4, 0]$ a $[0, 2]$. Graf dané funkce je nakreslen na obr. 2.13, kde jsou vyznačeny i souřadné osy u, v.



Obr. 2.13

2.6. Neřešené příklady.

Nakreslete (do jednoho obrázku) grafy funkcí:

1. $y = x$; $y = x + 3$; $y = x - 3$ $[(-\infty; \infty)]$
2. $y = x^2$; $y = (x-2)^2$; $y = (x+2)^2$ $[(-\infty; \infty)]$
3. $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{1}{x-1}$; $y = \dfrac{1}{x+1}$
$[(-\infty; 0) \cup (0; \infty);\ (-\infty; 1) \cup (1; \infty);\ (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)]$

Nakreslete graf funkce:

1. $y = 2 + x^2$ $[(-\infty; \infty)]$
2. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ $[(-\infty; 0) \cup (0; \infty)]$
3. $y = 2 + \dfrac{1}{x-2}$ $[(-\infty; 2) \cup (2; \infty)]$
4. a) $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$, b) $y = 1 - \dfrac{|x-2|}{x+5}$, c) $y = \left|\dfrac{x+1}{x-3}\right| - 4$
$[(-\infty; 3) \cup (3; \infty);\ (-\infty; -5) \cup (-5; \infty);\ (-\infty; 3) \cup (3; \infty)]$
5. $y = |x|$ $[(-\infty; \infty)]$
6. $y = |x + |x-1||$ $[(-\infty; \infty)]$
7. $y = |x^2 - 5x + 6|$ $[(-\infty; \infty)]$
8. $y = x^2 - 5|x| + 6$ $[(-\infty; \infty)]$