

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta elektrotechnická
Katedra elektromagnetického pole



Diplomová práce

Numerická analýza vyzařovací úlohy elektricky zmenšené smyčky

Bc. Vojtěch Závada

Vedoucí práce : Ing. Miloslav Čapek

Praha, květen 2013

Prohlašuji , že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením ing. Miloslava Čapka. Pro numerickou simulaci bylo použito programovací prostředí Matlab, všechna použitá literatura je uvedena.

Souhlasím se zveřejněním nebo dalším využitím této práce na katedře elektromagnetického pole FEL ČVUT v Praze.

V Praze, 9.5.2013

Abstrakt

Tato práce využívá integrální vztahy popisující vyzářený výkon a celkovou uloženou energii. Tyto vztahy jsou numericky vypočteny na dipólu, čtvercové, kruhové smyčkové anténě a na elektricky zmenšené smyčce. Dále je získána závislost činitele jakosti Q na frekvenci. Výsledky jsou srovnány s výsledky získanými pomocí modální dekompozice do charakteristických modů.

Klíčová slova

Vyzařovací činitel jakosti Q , Poyntingův teorém, modální dekompozice, půlvlnný dipol, celovlnná smyčka

Abstract

This work uses integral relations describing radiating power and total stored power. These relations are numerically solved for dipole, squared, circle loop antenna and for electrically reduced loop. Further dependency of Q -factor on frequency is received. Results are compared with results received through use of modal decomposition into characteristic modes.

Keywords

Q -factor, Poynting theorem, modal decomposition, half-wave dipole, full-wave loop

Děkuji ing. Miloslavu Čapkovi za vedení práce . Dále děkuji mé ženě Olze a rodině za podporu při studiu.

Obsah

1. Úvod	1
2. Teoretická část	2
2.1 Poyntingův teorém	2
2.2 Náhradní obvod antény	4
2.3 Činitel vyzařování Q	5
2.4 Vztahy pro W_e , W_m , Pr	6
2.5 Elementární elektrický zářič – Hertzův dipól	7
2.6 Vyzařování přímého vodiče konečné délky	9
2.7 Rozložení proudu na dipólu	10
2.8 Teorie charakteristických módů	11
3. Praktická část	14
3.1 Výpočet W_e , W_m , Pr pro půlvlnný dipól pomocí Matlabu	14
3.1.1 Výpočet Pr	14
3.1.2 Výpočet W_e , W_m	17
3.2 Závislost vyzářeného výkonu, magnetické, elektrické energie na frekvenci	18
3.3 Odvození transedentální rovnice pro elektricky zkrácenou smyčku	19
4. Výsledky	26
4.1 Kruhová smyčka	26
4.2 Čtvercová smyčka	28
4.3 Elektricky zkrácená smyčka	30
4.4 Srovnání výsledku s výsledky získanými pomocí teorie charakteristických módů	35
5. Závěr	37
Literatura:	38
Dodatky	39
Distribuční funkce:	39
Parametrizující funkce:	39
Integrace	40

Kruhová smyčka	43
Čtvercová smyčka	45

Seznam použitých symbolů:

$\mathbf{S}$	Poyntingův vektor
$\mathbf{E}$	vektor elektrické intenzity
$\mathbf{E}(x, y, z, t)$	vektor elektrické intenzity
$\mathbf{H}$	vektor magnetické indukce
$\mathbf{H}(x, y, z, t)$	vektor magnetické indukce
$\mathbf{J}$	proudový vektor
W	elektromagnetická energie
W_e	elektrická energie
W_m	magnetická energie
$\mathbf{E}(x, y, z)$	fázor elektrického pole
$\mathbf{H}(x, y, z)$	fázor magnetického pole
P_{vyz}	okamžitý vyzářený výkon
ω_0	úhlová frekvence
Z_A	vstupní impedance napájení
Q	činitel vyzařování
J_n	Vlastní funkce
λ_n	Vlastní číslo
k_0	Vlnové číslo
f_0	Rezonanční frekvence
ϵ_0, μ_0	permitivita vakua, permeabilita vakua
$\nabla \cdot \mathbf{J}$	divergence proudu

1. Úvod

Cílem této práce je aproximovat elektromagnetické chování tenké dipólové antény pomocí analytického funkcionálu. Víme přitom, že zkoumaná anténa je potenciálně širokopásmová pro nízké Q . Pro nalezení této závislosti je potřeba spočítat poměr energie uložené v okolí antény a vyzářeného výkonu. Potřebné vztahy pro výpočet akumulované elektrické, magnetické energie a vyzářeného výkonu odvodil ve svém článku profesor Vandebosch [1]. Jak ukážeme dále, je analytické řešení těchto vztahů velice obtížné i pro nejjednodušší struktury. Řešení tedy hledáme numericky, přičemž dále zjednodušujeme proudové rozložení na anténě, ve všech případech předpokládáme vybuzení prvního (dominantního) modu, u smyčky uvažujeme rovněž nulté (statické) řešení. Ukazuje se, že takovéto řešení lze úspěšně nalézt pomocí zjednodušeného tvaru charakteristického modu – v našem případě pomocí sinového rozložení. Pro lepší postihnutí frekvenční závislosti testujeme rovněž funkce typu $\sin(x)/x$.

Další částí úlohy je převedení tohoto postupu na elektricky zmenšenou smyčkovou anténu, přičemž jednotlivé části této antény budeme uvažovat jako elektricky nezávislé, proudové rozložení na každé její části bude sinusové. Takováto anténa má vhodné konstrukční a vyzařovací vlastnosti. Konstrukce antény vyžaduje řešení transcendentní rovnice a pokročilé vektorové a integrační postupy.

2. Teoretická část

2.1 Poyntingův teorém

Poyntingův teorém patří k základním principům teorie elektromagnetického pole. Tento teorém vychází ze základního fyzikálního zákona – ze zákona zachování energie a lze ho formulovat přímo z Maxwellových rovnic [2].

Poyntingův vektor $\mathbf{S}$ je definován jako vektorový součin vektorů elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a magnetické indukce $\mathbf{H}$. Fyzikálně vyjadřuje okamžitou hodnotu plošné hustoty výkonu.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (1)$$

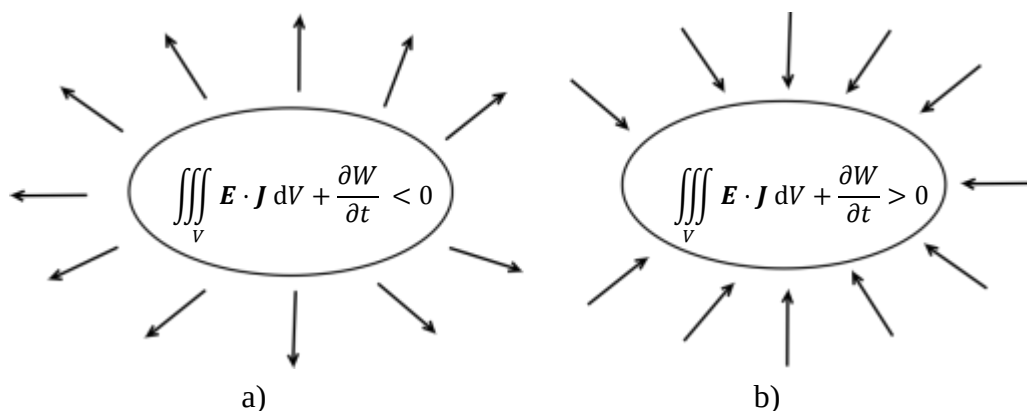
Integrální tvar Poyntingova teorému popisuje přenos elektromagnetické energie v rámci prostoru omezeného plochou S , s využitím Gauss-Ostrogradského věty:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \frac{\partial W}{\partial t} \text{ [W]} \quad (2)$$

Člen $-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ představuje okamžitý výkon tekoucí plochou S do uvažovaného objemu, člen $\partial W / \partial t$ odpovídá okamžitému výkonu, který zvyšuje celkovou akumulovanou energii v uvažovaném objemu. Tato energie W je rovna součtu celkové energii elektrického a celkové energii magnetického pole, vyjádřeno rovnicí:

$$W = W_e + W_m = \iiint_V w_e dV + \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dV + \iiint_V \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} dV \text{ [J]} \quad (3)$$

Člen na pravé straně rovnice $\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$ představuje zdrojové rozložení na dokonale vodivém objektu (PEC).



Obr 2.1.1 Energetická bilance v objemu V ohraničeného plochou S

Poyntingova rovnice (2) v integrálním tvaru je vhodná pro pochopení přeměny energie pohlcené nebo vyzářené v určitém prostoru a pomůže nám formulovat poměry na anténě.

Pro naši úlohu je vhodné uvést Poyntingův teorém pro harmonické průběhy. Převědeme vektory pole, které jsou závislé na prostorových souřadnicích a čase na fázory, které závisí pouze na prostorových souřadnicích. Fázory definujeme v měřítku efektivních hodnot [2]:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \sqrt{2} \operatorname{Im}\{\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (4)$$

Fázor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}(x, y, z)$ je obecně komplexní veličinou, můžeme jej vyjádřit vztahem

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_m e^{j\varphi} \mathbf{e}_0, \quad (5)$$

kde E_m je modul, φ je fáze fázoru a $\mathbf{e}_0$ udává jeho směr. Obdobně definujeme fázor intenzity magnetického pole $\mathbf{H}(x, y, z)$:

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sqrt{2} \operatorname{Im}\{\mathbf{H}(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (6)$$

Nyní odvodíme energetickou bilanci. Vyjdeme z Maxwellových rovnic pro fázory:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad \text{a} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}, \quad (8)$$

použijeme vektorovou identitu

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) \quad (9)$$

a dosadíme z Maxwellových rovnic:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot (-j\omega \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J}^* + j\omega \mathbf{D}^*) \quad (10)$$

Integrujeme rovnici přes objem V . Na levou stranu rovnice použijeme Gaussovu větu a pravou stranu upravíme. Dostaneme:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV - j\omega \iiint_V (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) dV \quad (11)$$

S použitím materiálových vztahů

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{a} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (12), (13)$$

rovnici přepíšeme

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV - j\omega \iiint_V (\mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV \quad (14)$$

Skalární součin fázoru s fázorem komplexně sdruženým je kvadrát jeho modulu:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \iiint_V E_m dV - j\omega \iiint_V (\mu H_m - \epsilon E_m) dV \quad (15)$$

Protože tato rovnice je komplexní musí platit:

$$-\oint_S \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \iiint_V E_m dV \quad [W] \quad (16)$$

$$-\oint_S \operatorname{Im}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = \omega \iiint_V (\mu H_m - \varepsilon E_m) dV = \omega (W_m - W_e), [W] \quad (17)$$

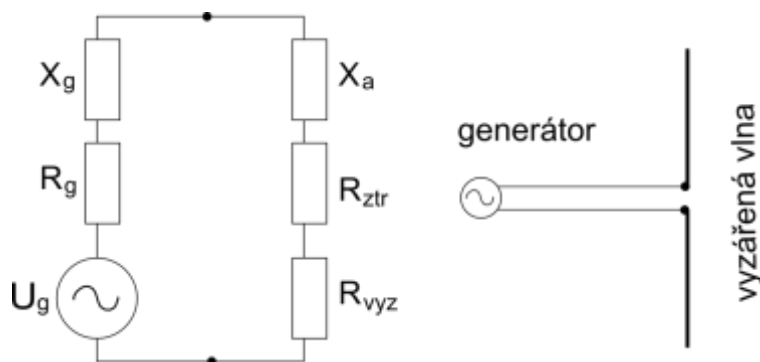
Kde W_e , W_m jsou střední hodnoty elektrického a magnetického pole. Toto odvození se vztahuje k obrázku a, kdy výkon elektromagnetické vlny je pohlcen v objemu V . Jestliže by výkon byl čistě reálný neboli fázor $\mathbf{E}$ je ve fázi s $\mathbf{H}$ potom se výkon přemění na teplo, v případě že fázory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ jsou fázově posunuty, část výkonu se přemění na zvýšení energií elektrického a magnetického pole. Toto je analogií k teorii obvodů, kde se činný výkon ztrácí na teplo v rezistorech a jalový výkon je uložen jako elektrická energie v kapacitorech a magnetická energie v induktancích.

V případě, že výkon je vyzařován z antény, pro velké vzdálenosti od antény se člen $\omega (W_m - W_e)$ blíží nule. [7] Proto ve vzdálené zóně platí:

$$P_r = \oint_{S_\infty} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \quad (18)$$

P_r je okamžitý vyzářený výkonu z antény.

2.2 Náhradní obvod antény



Obr 2.2.1 Náhradní schéma antény

Vstupní impedance antény je definována jako impedance antény na jejích napájecích svorkách, tedy jako poměr napětí a proudu na těchto svorkách, zpravidla se vztahuje k jednotkovému proudu $|I_0| = 1 \text{ A}$.

Vstupní impedance antény je vztažena k místu napájení:

$$Z_A = R_A + jX_A \quad [\Omega], \quad (19)$$

kde $R_A = R_{vyz} + R_{ztr}$, R_{vyz} je vyzařovací odpor antény, R_{ztr} je ztrátový odpor antény, dále budeme uvažovat pouze bezztrátovou anténu. X_A je reaktance vstupní impedance antény.

Vnitřní impedance generátoru je

$$Z_g = R_g + jX_g \quad [\Omega], \quad (20)$$

kde R_g je vnitřní odpor generátoru, X_g je reaktance vnitřní impedance generátoru. [3]

Anténa je výkonově přizpůsobena, jestliže platí: $R_{vyz} + R_{ztr} = R_g$ a současně $X_a = -X_g$.

Vyzářený, ztracený výkon:

$$P_r = |I_0|^2 R_{vyz} \quad P_{ztr} = |I_0|^2 R_{ztr} \quad (21),(22)$$

$$\text{kde } I_0 = \frac{U_g}{Z_g + Z_A}.$$

2.3 Činitel vyzařování Q

Činitel jakosti antény Q má velký význam pro posouzení účinnosti vyzařování antén na určité frekvenci, používá se zvláště při návrhu elektricky malých antén. Q faktor lze definovat několika způsoby, zde uvádíme definici, na kterou se budeme později odvolávat:

$$Q = \frac{2\omega_0 \max\{W_e, W_m\}}{P_r + P_{ztr}}, \quad (23)$$

kde W_e , W_m je uložená elektrická a magnetická energie a P_r je vyzářený výkon, P_{ztr} je ztrátový výkon antény. Vztah (23) předpokládá, že anténa je přizpůsobena externím bezztrátovým článkem na rezonanční frekvenci f_0 . Mluvíme tak o přizpůsobeném činiteli jakosti („tuned antenna Q“). Dále pro zjednodušení předpokládáme, že anténa bude z dokonalého vodiče, to znamená, že $P_r = 0$.

Činitel jakosti antény vyjadřuje podíl uložené a ztracené energie (vyzářením a ztrátami) za jednotku času.

Při návrhu vyzařovacího tvaru antény se snažíme, aby anténa měla na rezonanční frekvenci minimální možný faktor Q. S faktorem Q je také nepřímo úměrně svázána šířka pásma FBW. [18]

$$Q \approx \frac{1}{FBW} \quad [-] \quad (24)$$

2.4 Vztahy pro W_e , W_m , P_r

Pro přibližný odhad činitele jakosti antény Q známe několik postupů. Pro efektivní návrh vyzařovací plochy antény je vhodné do vztahů pro výpočet W_e , W_m , P_r zahrnout rozložení zdrojů na ploše. Tyto přesné vztahy zahrnující zdrojové veličiny (proudy a náboje) rozložené na uvažované geometrii, které odvodil prof. Vandenbosch přímo z Maxwellových rovnic. Jeho vztahy byly ověřeny a otestovány na jednoduchých anténách. Vztahy, které uvádí prof. Vandenbosch ve svém článku [1] a které budou použity pro výpočet Q elektricky zmenšené smyčky jsou následující:

Vztah pro vyzářený výkon:

$$P_r^{u,v} = \frac{1}{4\pi\omega_0\epsilon_0} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} [k_0^2 (\mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2)) - \nabla \cdot \mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2)] \frac{\sin(k_0 r_{21})}{r_{21}} d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (25)$$

vztah pro uloženou elektrickou energii:

$$W_e^{u,v} = \frac{1}{8\pi\omega_0^2\epsilon_0} (I_{W_e}^{u,v} - I_{W_r}^{u,v}), \quad (26)$$

vztah pro uloženou magnetickou energii:

$$W_m^{u,v} = \frac{1}{8\pi\omega_0^2\epsilon_0} (I_{W_m}^{u,v} - I_{W_r}^{u,v}), \quad (27)$$

kde

$$I_{W_e}^{u,v} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \nabla \cdot \mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2) \frac{\cos(k_0 r_{21})}{r_{21}} d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (28)$$

$$I_{W_m}^{u,v} = k_0^2 \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} (\mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2)) \frac{\cos(k_0 r_{21})}{r_{21}} d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (29)$$

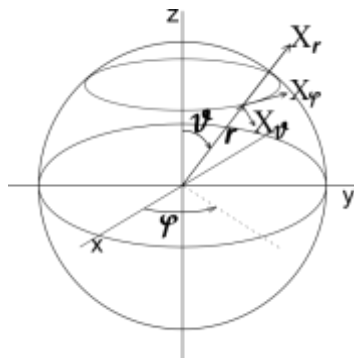
$$I_{W_r}^{u,v} = \frac{k_0}{2} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} [k_0^2 (\mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2)) - \nabla \cdot \mathbf{J}_u(\mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{J}_v^*(\mathbf{r}_2)] \sin(k_0 r_{21}) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (30)$$

přičemž hlavním přínosem článku prof. Vandenboshe je přesná formulace posledního vztahu. Jednotlivé členy v (25)-(30) jsou: k_0 vlnové číslo, ϵ_0 permitivita vakua, ω_0 úhlová rychlost.

2.5 Elementární elektrický zářič – Hertzův dipól

Elementárním zářičem (vyzařujícím dipólem) je přímý úsek vodiče dl s harmonickým proudem I . Úloha vyzařování elementárního dipólu je zjednodušená situace, která předpokládá, že rozložení proudu je po celé délce dl konstantní. To je splněno za předpokladu, že dl je velmi krátký element ve srovnání s vlnovou délkou a vyzařování sledujeme ve vzdálenosti $r \gg dl$.

Pole elementárního dipólu je určeno vektorem elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a vektorem magnetické indukce $\mathbf{H}$. Vzhledem k uvažované geometrii použijeme cylindrické souřadnice.



Obr 2.5.1 Souřadnice vektoru $\mathbf{X}$ v cylindrických souřadnicích.

Vektor elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a vektor magnetické intenzity v cylindrických souřadnicích:

$$\mathbf{E} = (E_\vartheta, E_r, E_\varphi), \quad \mathbf{H} = (H_\vartheta, H_r, H_\varphi) \quad (31)(32)$$

$$E_\vartheta = -\frac{I \cdot dl}{4\pi} Z k^2 \sin\vartheta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) e^{-jkr} \quad (33)$$

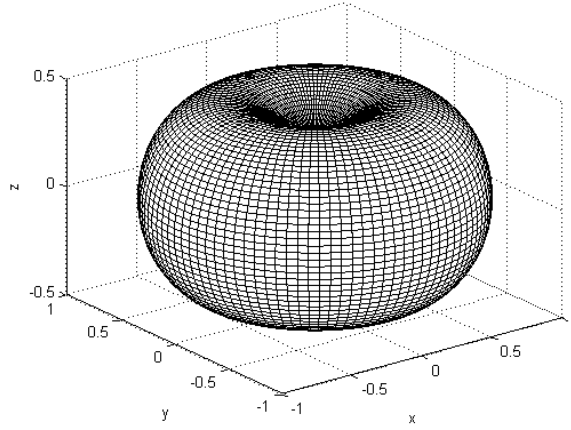
$$E_r = -\frac{I \cdot dl}{4\pi} Z k^2 2 \cos\vartheta \left(\frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) e^{-jkr} \quad (34)$$

$$H_\varphi = -\frac{I \cdot dl}{4\pi} k^2 \sin\vartheta \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) e^{-jkr} \quad (35)$$

Ostatní složky vektoru elektrické intenzity a magnetické indukce jsou nulové:

$$E_\varphi = H_r = H_\vartheta = 0 \quad (36)$$

Navíc si můžeme povšimnout, že složky pole nejsou závislé na úhlu φ , neboli že pro všechny úhly $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ má elementární dipól stejnou vyzařovací charakteristiku. Vyzařovací charakteristika má maximum pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Dipól nevyzařuje do směrů $\vartheta = 0$ a $\vartheta = \pi$.



Obr 2.5.2 Vyzářovací charakteristika Herzova dipólu

Ve velkých vzdálenostech platí: $\frac{1}{kr} > \frac{1}{(kr)^2} > \frac{1}{(kr)^3}$. Členy $\frac{1}{(kr)^2}, \frac{1}{(kr)^3}$ zanedbáme a složky elektrického a magnetického pole zjednodušíme na: (ostatní jsou nulové)

$$E_{\vartheta} = -\frac{jIdl}{4\pi r} Z k \sin\vartheta e^{-jkr} \quad (37)$$

$$H_{\varphi} = \frac{jIdl}{4\pi r} k \sin\vartheta e^{-jkr} \quad (38)$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru ve vzdálené zóně je

$$\mathbf{S}_{str} = \frac{1}{2} \text{Re}\{E_{\vartheta} H_{\varphi}^*\} = \frac{1}{2} \left(\frac{Idl}{4\pi r} k \sin\vartheta \right)^2 Z \mathbf{r}_0 \quad (39)$$

Střední hodnota klesá s druhou mocninou vzdálenosti r . Tato závislost je samozřejmá, protože kulová plocha roste s druhou mocninou r a integrál $\oint_{S_{\infty}} \mathbf{S}_{str} dS$ musí být přes libovolnou plochu obklopující dipól stejný, rovný energii vyzářené dipólem, jinak řečeno splňujeme Sommerfeldovu vyzářovací podmínku. Výkon vyzářený dipólem potom je:

$$P_r = \oint \mathbf{S}_{str} \cdot d\mathbf{S} = \int_r \mathbf{S}_{str} 2\pi r \sin\vartheta r d\vartheta \quad (40)$$

Po dosazení dostaneme

$$P_r = \pi \left(\frac{Idl}{4\pi} k \right)^2 Z \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{Idl}{4\pi} k \right)^2 Z = \frac{40\pi^2}{\sqrt{\epsilon_r}} \left(\frac{Idl}{\lambda_0} k \right)^2 \dots \dots \dots (41)$$

a pro vyzářovací odpor platí:

$$R_r = \frac{P_{vyz}}{I_{ef}^2} = \frac{80\pi^2}{\sqrt{\epsilon_r}} \left(\frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 [\Omega]. \quad (42)$$

Ve vzdálené zóně jsou vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ ve fázi, přenášejí pouze činný výkon, který se šíří ve směru od dipólu – pokud prostředí považujeme za bezztrátové.

V bezprostřední blízkosti dipólu platí $\frac{1}{(kr)^3} > \frac{1}{(kr)^2} > \frac{1}{kr}$. Ve složkách pole zanedbáme členy $\frac{1}{kr}$ s nízkými mocninami.

Pro vyzářený výkon plochou S kolem dipólu ve vzdálenosti r dostaneme :

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_0 r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (E_{\vartheta} H_{\varphi}^* \mathbf{r}_0 - E_r H_{\varphi}^* \boldsymbol{\vartheta}_0) \cdot \mathbf{r}_0 r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= Z \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0 dl}{\lambda} \right)^2 \left[1 - j \frac{1}{(kr)^3} \right] \quad (43)$$

Podle rovnice (7) výkon rozdělím na reálnou a imaginární část:

$$P_{vyz} = \text{Re}\{P\} = Z \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0 dl}{\lambda} \right)^2 \quad (44)$$

$$2\omega(W_m - W_e) = \text{Im}\{P\} = -Z \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0 dl}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{(kr)^3} \quad (45)$$

2.6 Vyzařování přímého vodiče konečné délky

Elektromagnetické pole přímého, tenkého vodiče můžeme teoreticky spočítat jako superpozici příspěvků elektromagnetické pole od proudových elementů (elementárních dipólů).

Uvažujeme, že velmi tenký vodič délky $2L$ je napájen ve svém středu, potom rozložení proudu aproximujeme funkcí [14]

$$J(x) = |I_0| \sin(k_0(L - |x|)) \mathbf{x}_0 \delta(y) \delta(z) \quad (46)$$

kde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo a I_0 je amplituda ($I_0 = 1A$). Tento vztah je v praxi ověřen, vyjadřuje, že rozložení proudu má harmonický průběh a na koncích dipólu je nulový (platí Dirichletova okrajová podmínka) [16]. Výpočet rozložení proudu je komplikovaný problém, kde je třeba řešit integrální rovnice pomocí momentové nebo iterační metody[3]. Intenzita elektrického pole ve vzdálené zóně je podle (28)

$$E_{\vartheta} = Z H_{\varphi} = j \frac{Z k \sin\vartheta}{4\pi R} e^{-jkr} I_m \int_{-L}^L \sin(k(L - |x|)) e^{jkx \cos\vartheta} dx \quad (47)$$

Kupříkladu pro půlvlnný dipól, kdy $2L/\lambda = 1/2$ poslední rovnici lze zjednodušit na

$$E_{\vartheta} = Z H_{\varphi} = j \frac{60 I_m}{R} e^{-jkr} \frac{\cos[(\pi/2)\cos(kL)]}{\sin\vartheta} \quad (48)$$

Celkový vyzařovaný výkon pro půlvlnný dipól potom je

$$P_{vyz} = 30 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos(\vartheta)]}{\sin\vartheta} d\vartheta \quad (49)$$

Tento integrál lze řešit numericky. Vyzařovací odpor půlvlnného dipólu potom je

$$R_{vyz} = \frac{2P_{vyz}}{I_m^2} = \frac{P_{vyz}}{I_{ef}^2} = 30(\ln\gamma + \ln(2\pi) - \text{Ci}(2\pi)) = 73.03 \, \Omega, \quad (50)$$

kde $\ln\gamma$ je rovno Eulerově konstantě $\ln\gamma = 0.577$, $\text{Ci}(x)$ je integrální kosinus. Vyzařovací odpor je reálná část impedance půlvlnného dipólu, imaginární část impedance je podle [11] rovna

$$X_A = 30\text{Si}(2\pi) = 42.49 \, \Omega, \quad (51)$$

kde $\text{Si}(x)$ je integrální sinus.

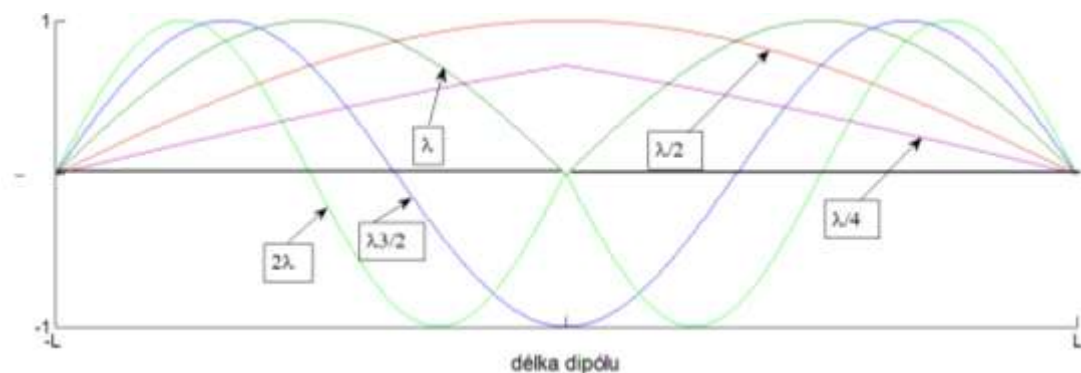
2.7 Rozložení proudu na dipólu

Pro velmi krátkou anténu, můžeme považovat rozložení po celé délce dipólu za konstantní, zanedbáme změnu fáze proudu na tomto dipólu. Elementární dipól je příkladem tohoto rozložení proudu. Elementární dipól: $I(x) = |I_0|$

Pro antény jejichž délka je mnohem menší než $\lambda/2$ je distribuce proudu trojúhelníkovitá. Rozložení proudu u těchto dipólů je aproximováno funkcí $I(z) = I(L - \frac{|z|}{L})$.

Pro dipóly, jejichž délka je delší než $\lambda/4$ nemůžeme zanedbat změnu fáze na dipólu a rozložení proudu vyjádříme stojatou vlnu, napájení uvažujeme uprostřed.

Na následujícím obrázku je proudové rozložení na dipólu pro délky $2L = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda$ a 2λ .



Obr 2.7.1 Proudové rozložení na dipólu délky $2L$

2.8 Teorie charakteristických módů

Tato teorie poskytuje vhodný nástroj při návrhu antén.

Teorie charakteristických módů přiřazuje anténě množinu tzv. módů. Modem rozumíme charakteristické rozložení proudů na anténě. Mody jsou určeny pouze geometrií. Mody tvoří ortogonální systém, proto je celkový proud dán superpozicí proudů náležejících vybuzeným módům.. Napájení ovlivňuje, které mody se vybudí, případně jak intenzivně. Potřebná matematická teorie je uvedena v [9].

Pro každý vodivý objekt v elektrickém poli E^i můžeme napsat tuto rovnici pro tečné složky na povrchu:

$$[L(\mathbf{J}) - \mathbf{E}^i]_{tan} = 0, \quad (52)$$

Kde $L(\mathbf{J}) = j\omega\mathbf{A}(\mathbf{J}) + \nabla\Phi(\mathbf{J})$. Operátor $L(\mathbf{J})$ vlastně určuje intenzitu elektrického pole vyvolaného proudem $\mathbf{J}$. Operátor $L(\mathbf{J})$ má tedy charakter impedance a zavedeme označení:

$$L(\mathbf{J}) = \mathbf{Z}(\mathbf{J}) \quad (53)$$

Pro každý vodivý objekt můžeme určit tzv. impedanční matici $\mathbf{Z}$, např. pomocí metody momentů. Tato matice má reálnou a imaginární část.

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{R}] + j[\mathbf{X}] \quad (54)$$

Proud $\mathbf{J}_n$ odpovídající n -tému módu je řešením této rovnice

$$[\mathbf{X}]\mathbf{J}_n = \lambda_n[\mathbf{R}]\mathbf{J}_n, \quad (55)$$

kde λ_n je vlastní číslo odpovídající vlastní funkci $\mathbf{J}_n$.

Celkový proud je dán superpozicí proudů $\mathbf{J}_n$.

$$\mathbf{J} = \sum_n \frac{V_n^i \mathbf{J}_n}{1 + j\lambda_n}, \quad (56)$$

kde V_n^i je excitační koeficient, který vyjadřuje míru vybuzení jednotlivých módů v závislosti na zvoleném napájení.

$$V_n^i = \langle \mathbf{J}_n, \mathbf{E}^i \rangle \quad (57)$$

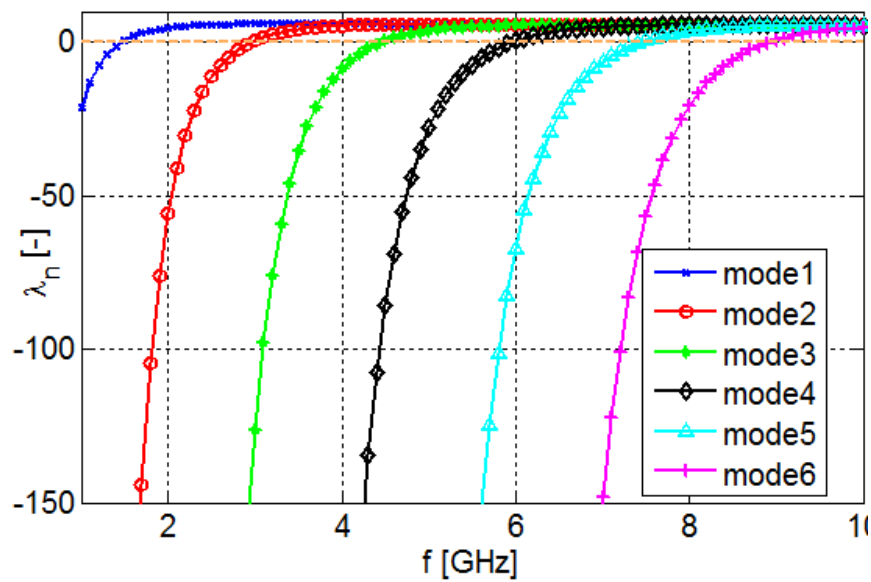
Z rovnice (56) vyplývá, že charakteristické číslo λ_n na dané frekvenci určuje, zda mód daný s proudovým rozložením $\mathbf{J}_n$ je

-v rezonanci potom $\lambda_n = 0$

-má kapacitní charakter $\lambda_n < 0$

-má induktivní charakter $\lambda_n > 0$

Vlastní čísla λ_n jsou závislé na frekvenci, jak vidíme na následujícím obrázku .



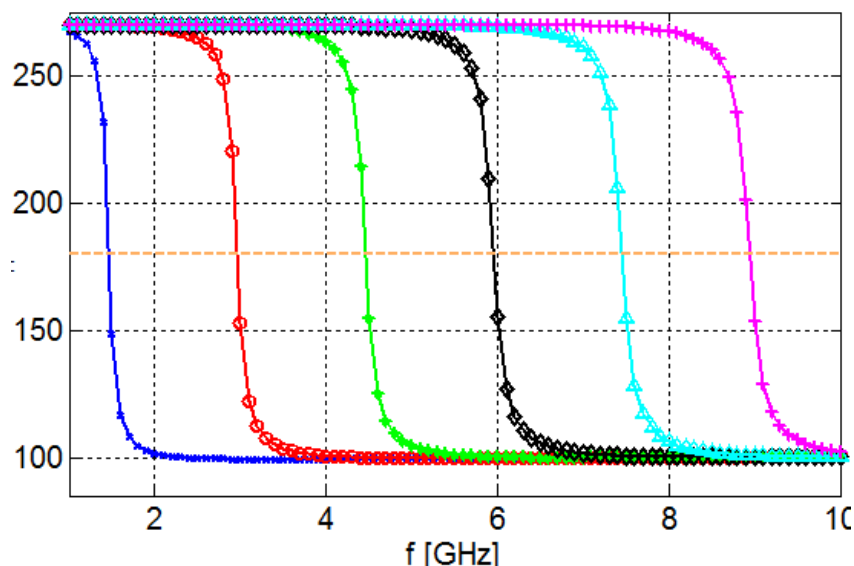
Obr 2.8.1 .Závislost charakteristických čísel na frekvenci pro dipól

Zvyšujeme-li frekvenci , λ_n má kapacitní charakter, pak rezonuje ($\lambda_n=0$) ,pro vyšší frekvence má téměř konstantní kladnou hodnotu.

Pro lepší určení rezonance a šířky pásma se zavádí tzv. charakteristický úhel

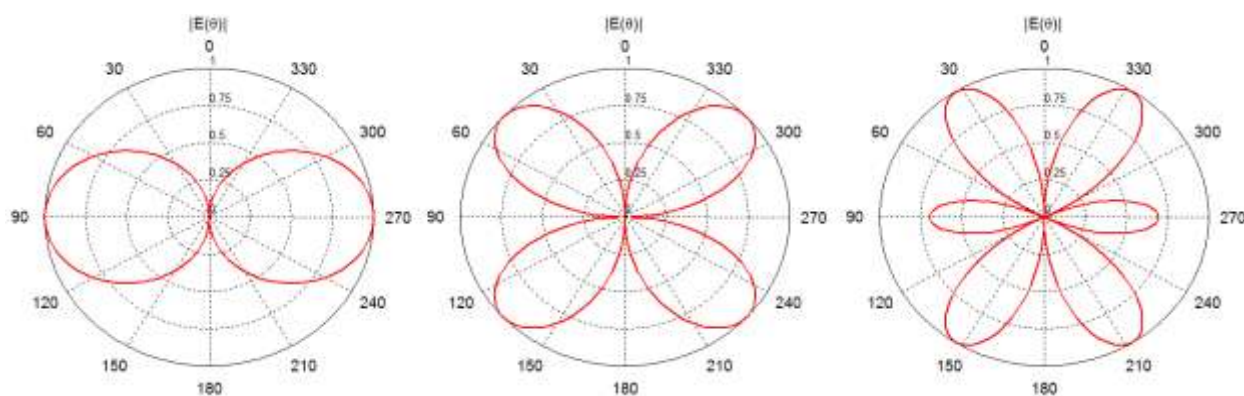
$$\alpha_n = 180^\circ - \operatorname{atan}^{-1}(\lambda_n) \quad (58)$$

V rezonanci je α_n rovno 180° . Ze strmosti křivek můžeme uvažovat šířky pásem vyzařování.



Obr 2.8.2 . Závislost charakteristického úhlu na frekvenci pro dipól délky 2m

Na obr 2.8.2 vidíme, že 1.mód (značen modrou barvou) má rezonanci na frekvenci přibližně 1,7GHz. Na této frekvenci bude na dipólu vybuzen pouze mód 0, který má statický charakter a mód 1. Základní mód J_1 rezonuje pro délku dipólu rovnou $\frac{\lambda}{2}$, podobně módy vyšších řádů J_2, J_3, J_4 rezonují pro délku dipólu rovnou $L=\lambda$, $L=\frac{3}{2}\lambda$ a $L=2\lambda$. Proudové rozložení prvního módu J_1 lze velmi dobře aproximovat rovnicí (46), ale pouze na frekvenci odpovídající rezonanci prvního módu.



Obr 2.8.3 Vyzařovací charakteristiky pro jednotlivé módy

3. Praktická část

3.1 Výpočet W_e , W_m , P_r pro půlvlnný dipól pomocí Matlabu

3.1.1 Výpočet P_r

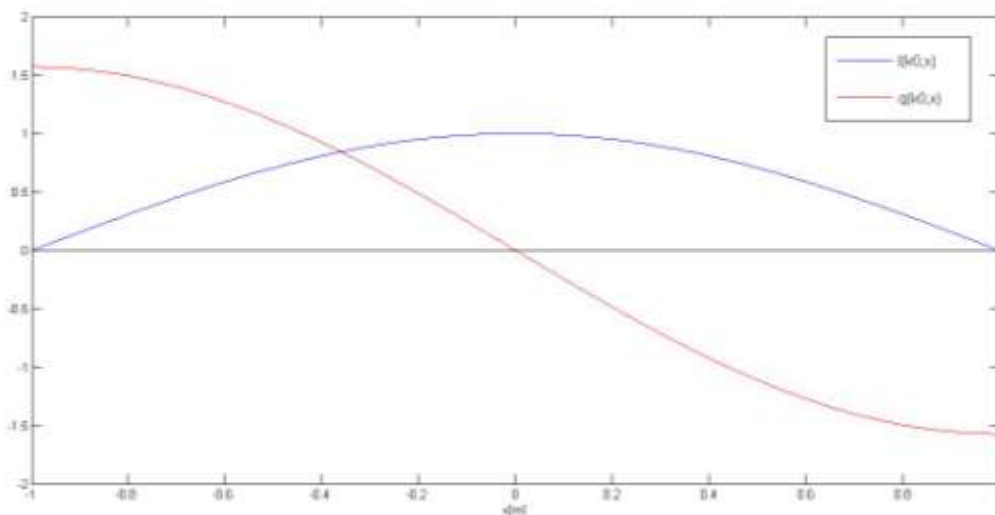
Uvažujeme přímý lineární půlvlnný dipól délky $2L$, $L=1\text{m}$. Rozložení proudu uvažujeme

$$\mathbf{J}(x, k_0) = |I_0| \cos(k_0 x) \delta x_0 \delta(y) \delta(z) \quad (59)$$

Potom rozložení náboje je

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(x, k_0) = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = -k_0 |I_0| \sin(k_0 x), \quad (60)$$

kde k_0 je vlnový vektor $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ pro půlvlnný dipól platí $\lambda_0/2 = 2L$.



Obr 3.1.1.1 Zobrazení zdrojů J a q na dipólu délky 2m , pro vlnový vektor $k_0 = \pi/2$

Po dosazení rozložení proudu a náboje dostaneme integrál:

$$P_r = \frac{k_0^2}{4\pi\omega_0\epsilon_0} \iint_{\Omega} [\cos(k_0 x) \cos(k_0 y) - \sin(k_0 x) \sin(k_0 y)] \frac{\sin(k_0 |x - y|)}{|x - y|} dy dx \quad (61)$$

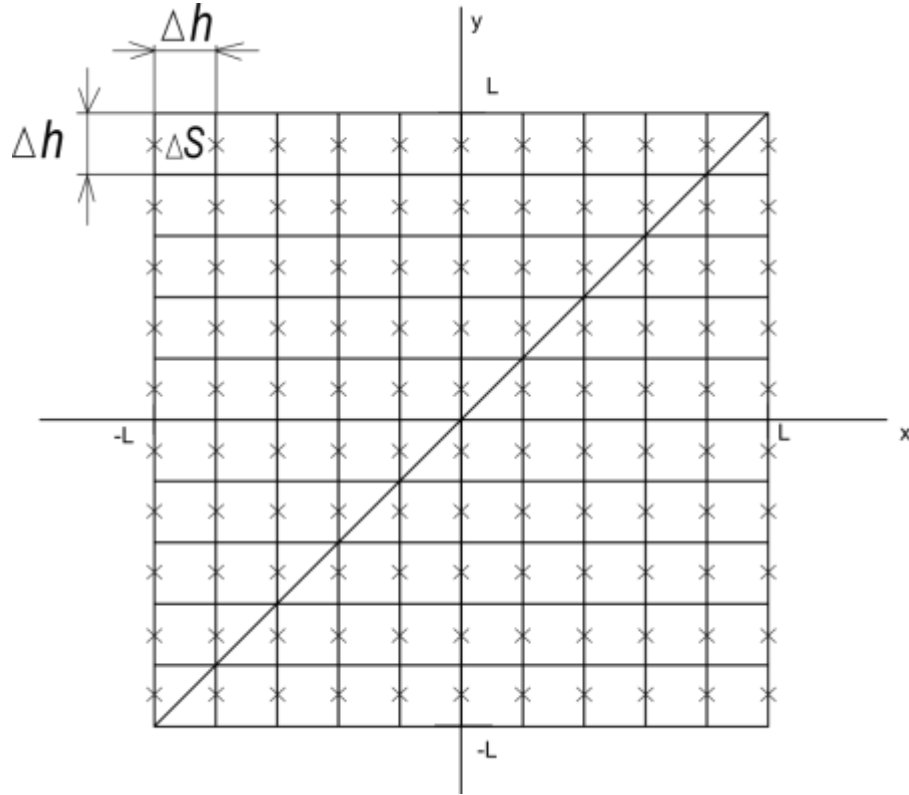
kde $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ a ϵ_0 je permitivita vakua, $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} [\text{F/m}]$, Ω je oblast zdrojů, $|I_0| = 1\text{A}$. Tento integrál lze vyčíslit numericky v Matlabu. Funkce

$$f(x, y) = \frac{k_0^2}{4\pi\omega_0\epsilon_0} [\cos(k_0x)\cos(k_0y) - \sin(k_0x)\sin(k_0y)] \frac{\sin(k_0|x-y|)}{|x-y|} \quad (62)$$

je definována pro $\Omega \in (-1,1) \times (-1,1)$ Tuto plochu rozložíme na mřížku $N \times N$, v každé buňce spočítáme funkci $f(x, y)\Delta S$.

U vztahů pro výpočet elektrické a magnetické energie se ale vyskytuje člen $\frac{\cos(k_0|x-y|)}{|x-y|}$. Tento člen na přímce $y=x$ má singularitu typu $\frac{\cos(k_0|x-y|)}{|x-y|} \sim \frac{1}{0}$. Tato singularita je neodstranitelná.

A protože potřebujeme mít univerzální integrační proceduru, zvolili jsme výpočet $f(x, y) = \frac{f(x+\Delta h, y+\frac{\Delta h}{2}) + f(x, y+\frac{\Delta h}{2})}{2}$, kde Δh je šířka buňky $\Delta h = \frac{2L}{N}$. Tímto způsobem se vyhneme singularitě na přímce $y=x$.



Obr 3.1.1.2 Mřížka pro $N=10$, funkce $f(x,y)$ se počítá v bodech vyznačenými křížky

Vyzářený výkon vyjádřený ve tvaru

$$P_r = \frac{k_0^2}{4\pi\omega_0\epsilon_0} \sum_{x=-L}^{L-\Delta h} \sum_{y=L}^{L-\Delta h} \frac{f(x, y + \frac{\Delta h}{2}) + f(x + \Delta h, y + \frac{\Delta h}{2})}{2} \Delta S \quad (63)$$

lze jednoduše spočítat v matlabu. Pro výpočet integrálu byla vytvořena funkce `integr2D.mat`, výpis této funkce je uveden v příloze. V tab. 3.1.1 jsou vypočteny hodnoty vyzářeného výkonu půlvlnného přímého dipólu délky 2m pro různou hustotu mřížky.

N	P_r [W]	t[s]
10	72.722	0.03
50	73.064	0.03
100	73.075	0.17
500	73.0788	4.14
1000	73.0789	16.9
5000	73.0790	399.69

Tab. 3.1.1 Konvergence dvoubodová P_r

Jestliže hodnotu funkce $f(x, y)$ v buňce počítám pomocí čtyř bodů ve středech stran buňky,

$$f(x, y) = \frac{f\left(x + \frac{\Delta h}{2}, y\right) + f\left(x + \frac{\Delta h}{2}, y + \Delta h\right) + f\left(x, y + \frac{\Delta h}{2}\right) + f\left(x + \Delta h, y + \frac{\Delta h}{2}\right)}{4} \quad (64)$$

získáme následující hodnoty:

N	P_r [W]	t[s]
10	72.722	0.01
50	73.064	0.09
100	73.075	0.32
500	73.0788	8.23
1000	73.0789	32.71
5000	73.0790	823.69

Tab. 3.1.2 Konvergence čtyřbodová P_r

Srovnáním Tab. 3.1.1 s Tab. 3.1.2 vidíme, že jsme dospěli ke stejným hodnotám za přibližně dvojnásobný čas. Funkce $f(x, y)$ je na naší mřížce souměrná podle středu. Tímto postupem jsme pouze zdvojnásobili počet bodů, ale tyto body k spřesnění integrálu P_{yyz} nepřispějí.

3.1.2 Výpočet W_e , W_m

Pro elektrickou energii W_e se po dosazení (28), (29) do (26) a úpravě dostane

$$W_e = \frac{k_0^2}{8\pi\omega_0^2\epsilon_0} \int \int \left(\sin(k_0x)\sin(k_0y) \frac{\cos(k_0|x-y|)}{|x-y|} - \frac{k_0}{2} [\cos(k_0x)\cos(k_0y) - \sin(k_0x)\sin(k_0y)] \sin(k_0|x-y|) \right) dx dy \quad (65)$$

Podobně pro uloženou magnetickou energii W_m dostáváme

$$W_m = \frac{k_0^2}{8\pi\omega_0^2\epsilon_0} \int \int \left(\cos(k_0x)\cos(k_0y) \frac{\cos(k_0|x-y|)}{|x-y|} - \frac{k_0}{2} [\cos(k_0x)\cos(k_0y) - \sin(k_0x)\sin(k_0y)] \sin(k_0|x-y|) \right) dx dy \quad (66)$$

Tyto integrály vyřeším podobně jako vyzářený výkon pomocí funkce v matlabu `integr2D.m`. Zde uvádím pouze výslednou tabulku pro vypočtenou akumulovanou energii.

$$W_a = W_m - W_e \quad (67)$$

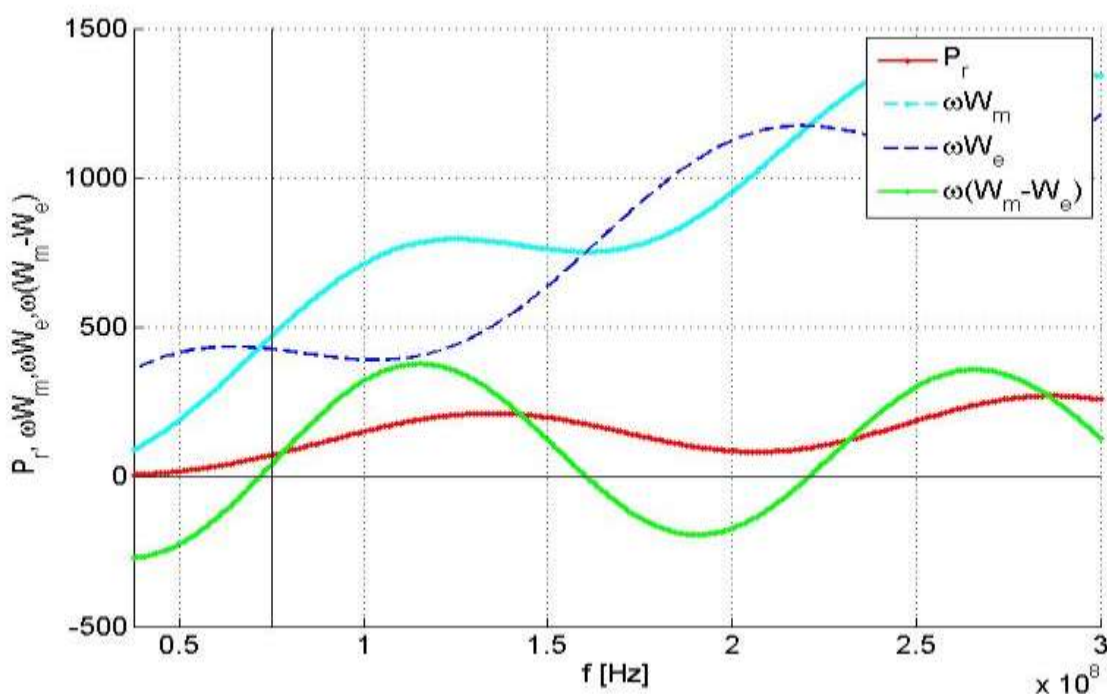
$$W_a = \frac{k_0^2}{8\pi\omega_0^2\epsilon_0} \int \int [(\cos(k_0x)\cos(k_0y) - \sin(k_0x)\sin(k_0y)) \frac{\cos(k_0|x-y|)}{|x-y|}] dy dx \quad (68)$$

N	W_a [W]	t[s]
10	42.086	0.01
50	42.497	0.21
100	42.510	0.18
500	42.514	4.64
1000	42.5150	17.1
5000	42.5151	463

Tab. 3.1.3 Konvergence dvoubodová W_a

3.2 Závislost vyzářeného výkonu, magnetické , elektrické energie na frekvenci

Doposud jsme se v praktické části zabývali půlvlnným dipólem na rezonanční frekvenci. Nyní je možné postup, který jsme použily u půlvlnného dipólu použít na přímý vodič délky $2L$. Napájení umístíme doprostřed přímého vodiče. Použijeme distribuci $J(x, k_0) = I_m \sin(k(L - |x|))\mathbf{x}_0\delta(y)\delta(z)$, kde k je vlnový vektor na dané frekvenci. Použitím tohoto postupu spočteme v Matlabu závislost W_e , W_m , P_r na frekvenci. Následující závislost je spočtena pomocí skriptu `zavislost.m`.



Obr 3.1.2 Závislost P_r a $\omega(W_m - W_e)$ na frekvenci pro liniovou anténu délky 2m

Z grafu závislosti můžeme učinit několik pozorování:

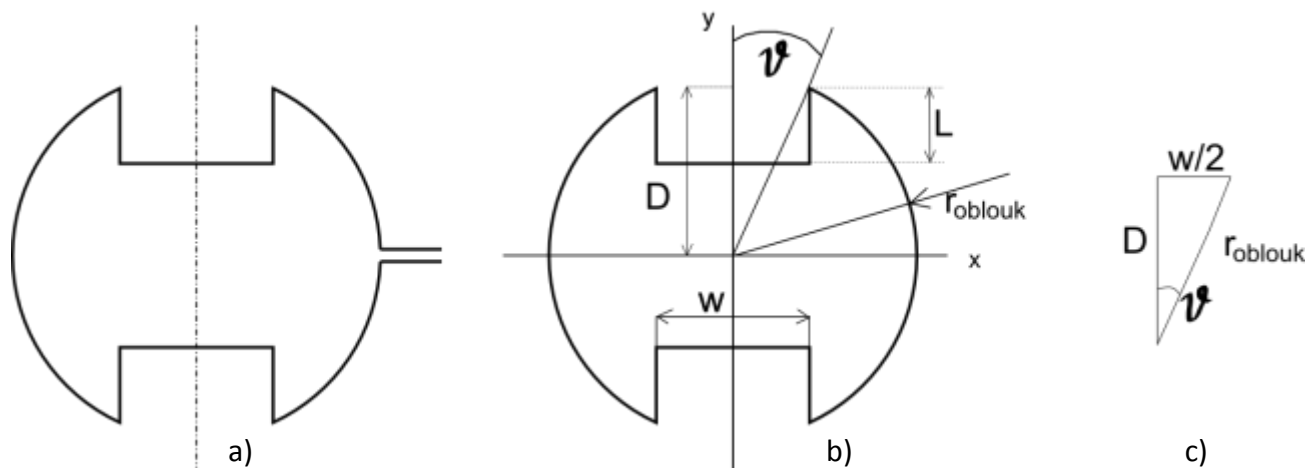
1. Vyzářený výkon je pozitivně definitní
2. Výkon na rezonanci f_0 je $P_0 = P_r + j\omega(W_m - W_e)$. Výkon přepočítáme na vstupní impedanci a dostaneme $Z_A = 73,03 + j42,5 \Omega$. Tento výsledek je v dobré shodě s teoretickými hodnotami.
3. Hodnoty W_m a W_e oscilují. Hodnota akumulované energie $\omega(W_m - W_e)$ v okolí antény je nulová na frekvenci $f = 0,716$ GHz. Tato hodnota je blízká teoretické rezonanční frekvenci $f = 0,749$ GHz.
4. Ve shodě s teorií charakteristických módů je fakt, že pro $f < f_{rez}$ u 1. modu převládá kapacitní charakter $W_e > W_m$, v rezonanci je akumulovaná energie blízká nule a pro frekvence $f > f_{rez}$ převládá induktivní charakter $W_e < W_m$.
5. Z uvedených pozorování můžeme říct, že sinová distribuce proudu (59) je použitelná a dává dobré výsledky na rezonanční frekvence 1. modu.

3.3 Odvození transedentální rovnice pro elektricky zkrácenou smyčku

Tato elektricky zkrácená smyčka již byla zkoumána a nasimulována v CST-MWS. V práci [19] bylo ukázáno, že tato anténa má dobré vyzařovací vlastnosti a přizpůsobení.

Elektricky zkrácenou smyčku navrhujeme v Matlabu proto, abychom porovnali její vlastnosti s kruhovou smyčkou a ověřili si, že antény složitějších tvarů lze složit z dipólů.

Anténu můžeme rozdělit na pravou a levou polovinu a předpokládat, že na rezonanční frekvenci se pravá a levá polovina chovají jako dva dipóly paralelně spojené. Napájení umístíme doprostřed pravého dipólu.



Obr 3.3.1 Elektricky zkrácená smyčka

Na horním obrázku je nákres elektricky zmenšené smyčky. Vztahy, které popisují tuto smyčku:

$$4L + 2w + 2l = 2\pi R_{rez} \quad (69)$$

Kde l je délka oblouku, R_{rez} je poloměr základní smyčky, na které by anténa měla rezonanci.

$$l = r_{oblouk}(\pi - 2\vartheta) = \sqrt{D^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2} (\pi - 2\vartheta) \quad (70)$$

Z obr 7b určíme třetí rovnici, popisující upravenou smyčku.

$$\sin\vartheta = \frac{w/2}{r_{oblouk}} = \frac{w/2}{\sqrt{D^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2}}, \quad (71)$$

$$\text{úpravou první rovnice dostanu: } L = \frac{\pi R_{rez} - w - l}{2}, \quad (72)$$

$$\text{dále upravím druhou rovnici pomocí třetí a tím získáme: } l = \frac{w/2}{\sin\vartheta} (\pi - 2\vartheta). \quad (73)$$

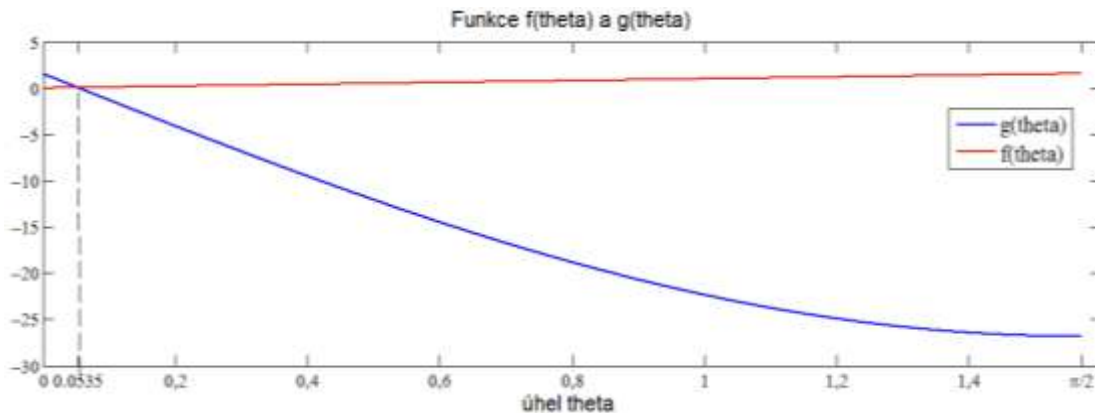
$$\text{Do rovnice (52) dosadím za } l \text{ rovnici (53) a dostanu: } L = \frac{\pi R_{rez}}{2} - \frac{w}{2} \left(1 + \frac{\pi - \vartheta}{2\sin\vartheta}\right). \quad (74)$$

Toto je výsledný vztah, z tohoto vztahu potřebujeme vyjádřit úhel ϑ jako funkci L, w . R_{rez} budu považovat za konstantu. Tato rovnice je transcendentní a je možno ji řešit numericky, pomocí iterací. V programu Matlab jsme pro výpočet tohoto úhlu vytvořili funkci `double_notched_generator.m`.

Myšlenka výpočtu je následující. Poslední je rovnice je přepsána do tvaru:

$$\vartheta = \left(\frac{\pi - 2\sin\vartheta}{w} \left(L - \frac{\pi R_{rez}}{2} \right) - 1 \right) \quad (75)$$

Levou stranu rovnice považujeme za funkci úhlu $f(\vartheta)$, pravou stranu označíme funkcí úhlu ϑ $g_{w,L,R_{rez}}(\vartheta)$.



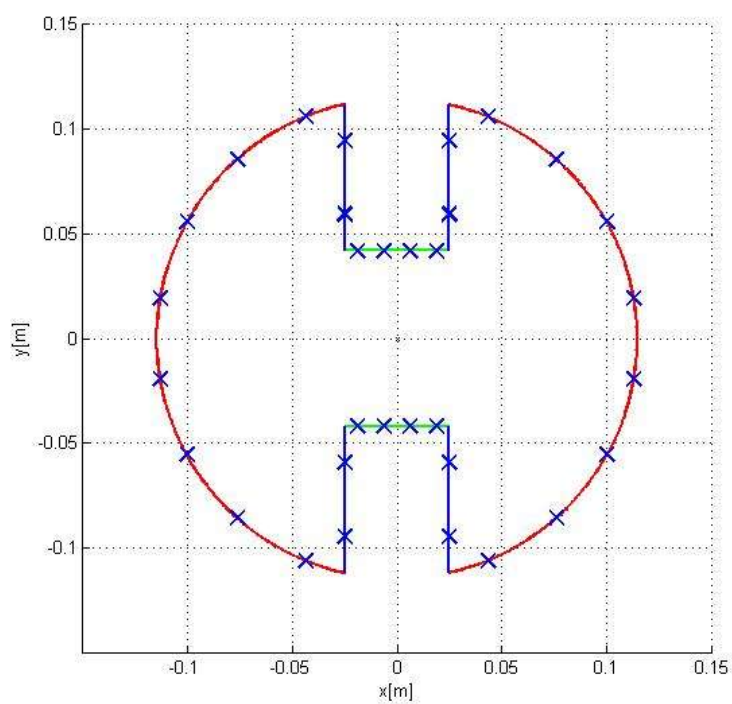
Obr 3.3.2 Funkce $f(\vartheta)$, $g_{0.1,0.1,1}(\vartheta)$

Nalezení průsečíku těchto dvou funkcí je řešením transcendentální rovnice. Úhel ϑ má definiční obor $(0, \frac{\pi}{2})$. Ve funkci `double_notched_generator.m` se hledá průsečík ve smyčce. Při běhu další smyčkou se úhel ϑ postupně zvětšuje o konstantu 0.0001 od $\vartheta = 0.0001$ do $\frac{\pi}{2} - 0.0001$. Ve smyčce se testuje zda je už funkce $f(\vartheta) > g(\vartheta)$. Jestliže ano, jsme už za průsečíkem a daný úhel je řešením transcendentální rovnice s přesností $\varepsilon_{err} = 1.10^{-4}$ m. Dále byla v Matlabu vytvořena funkce `double_notched_plot.m`, která antenu vykreslí z hodnot spočtených ve funkci `double_notched_generator.m`.

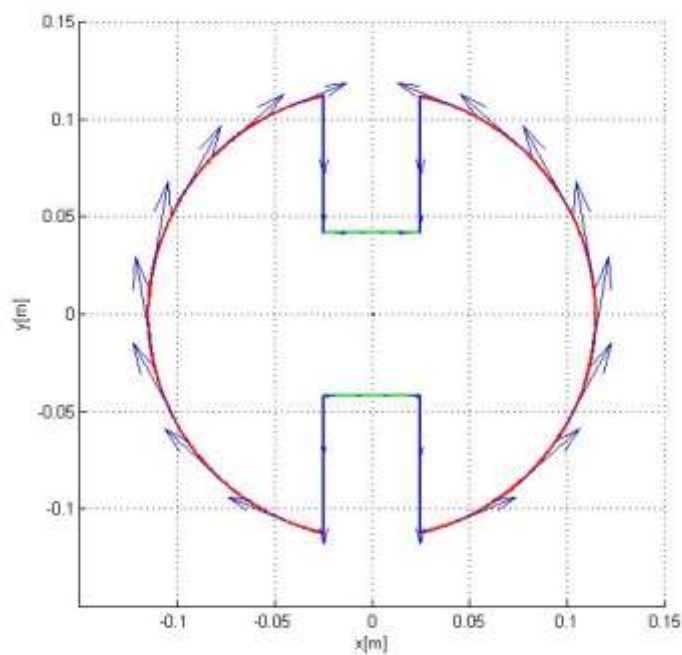
3.4 Nalezení rozložení zdrojů na elektricky zmenšené smyčce

Podobně jako na dipólu byl proud a náboj rozložen pomocí funkcí (59) a (60), nyní potřebujeme získat zdroje na naší upravené smyčce. K tomuto účelu byla v Matlabu vytvořena funkce `[J,Q,R,dl]=get_sources_double_notched_loop(r,w,L,dx,f0)`. Parametry r , w , L mají stejný význam jako u funkce `double_notched_generator.m`. a týkají se geometrie antény, dx vyjadřuje požadované dělení, f_0 je frekvence které bude odpovídat rozložení proudu a náboje.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny body, ve kterých funkce `get_sources_double_notched_loop` vrací výstupy J, Q, R pro zvolené dělení struktury $dx=0.05$. Na obrázku je vidět, že dělení je vytvořeno tak, aby proudový vektor J nebyl určován v rozích struktury, kde by nebylo snadné určit jeho směr. Dále si můžeme všimnout, že dělení struktury je rozdílné pro oblouky a pro kapacitní a induktivní část antény. Dělení $dx=0.05$ je vstupní parametr, funkce vytvoří dělení takové, aby každá část antény (oblouk, induktivní, kapacitní) byla rovnoměrně rozdělna na sudý počet stejně dlouhých úseků, jejichž délka se blíží 0.05.



Obr 3.4.1 Ukázka dělení pro zvolený parametr $dx=0.05\text{m}$



Obr 3.4.2 Proudové rozložení na anténě na základní frekvenci

Funkce `[J,Q,R,dl]=get_sources_double_notched_loop(r,w,L,dx,f0)` vygeneruje matici J velikosti $2 \times N$, vektor Q velikosti $1 \times N$, matici R velikosti $2 \times N$ a vektor dl velikosti $1 \times N$. n -tý řádek matic/vektorů vyjadřuje proudový vektor $\mathbf{J}(x,y)$, náboj q , vektor $\mathbf{R}(x,y)$ určující polohu elementu v rovině xy a dl je délka n -tého elementu.

Rozložení proudu $\mathbf{J}$ na naší anténě je stejně jako na dipólu dáno funkcí sinus (59). Ve funkci `get_sources_double_notched_loop` je (59) “rozvinuta” podél antény. Přičemž napájení je umístěno v maximu a vektor proudu $\mathbf{J}$ má směr tečny k vodiči. Rozložení náboje na anténě získáme podobně, použijeme-li rovnici (60).

3.5 Nalezení rozložení zdrojů na jednoduchých anténách – parametrická analýza

Pro jednoduché smyčkové antény byly vytvořeny funkce generující zdroje.

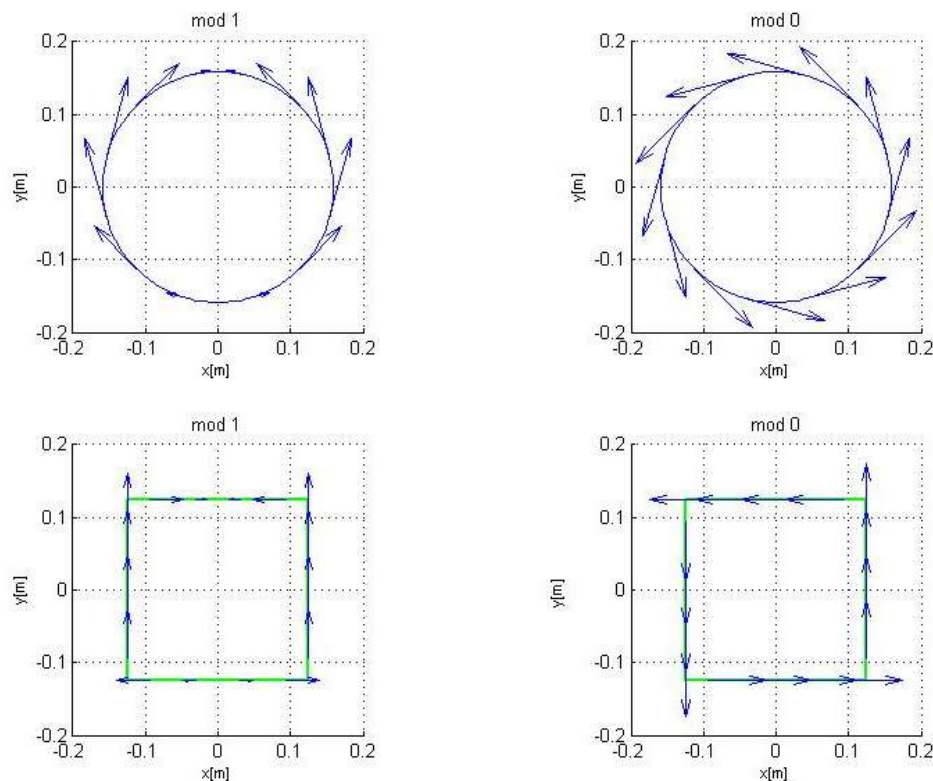
pro smyčkovou anténu ve tvaru čtverce:

`[J,Q,R,dl]=get_sources_squared_loop(LL,dx,f0),`

pro kruhovou smyčku:

`[J,Q,R,dl]=get_sources_loop(radius,dx,f0).`

Na obr 3.5.1 je zobrazeno rozložení proudů na základní frekvenci f_0 na těchto anténách.



Obr 3.5.1 Kruhová a smyčková anténa, mod 1 a statický mod

3.6 Výpočet vyzážené energie na jednoduchých anténách

V kapitole 3.1.1 jsme uvedli integrační postup pro půlvlnný dipól. Protože na dipólu mají vektory proudu stejný směr, v rovnici (59) jsme skalární součin vektorů $\mathbf{J}$ nahradili součinem velikostí proudů v daných bodech na dipólu. Toto byl zjednodušený postup, který je platný pouze pro dipóly a liniové antény, orientované podél jedné z os.

Pro výpočet vyzáženého výkonu na smyčkových anténách vyjdeme z rovnice (16). Tuto rovnici přepíšeme do jiného tvaru, tak jak ji použijeme v Matlabu:

$$P_r = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \frac{1}{8\pi\omega_0\epsilon_0} [k_0^2 (\mathbf{J}_s(x,y) \cdot \mathbf{J}_t(x,y)) - \nabla \cdot \mathbf{J}_s(x,y) \nabla \cdot \mathbf{J}_t(x,y)] \frac{\sin(k_0 \mathbf{R}_{s-t})}{R_{s-t}} dl_s dl_t, \quad (76)$$

kde $\mathbf{J}_s(x,y)$, q_s , $\mathbf{R}_s(x,y)$ a dl_s odpovídají s-tému elementu. R_{s-t} je vzdálenost vektorů $\mathbf{R}_s$ a $\mathbf{R}_t$.

Rovnici (76) spočte Matlab na dané frekvenci f_0 pomocí dvou příkazů:

```
[J,Q,R,dl]=get_sources_double_notched_loop(r,w,L,dx,f0);  
PR = integral33('Pr1',J,Q,R,dl,f0);
```

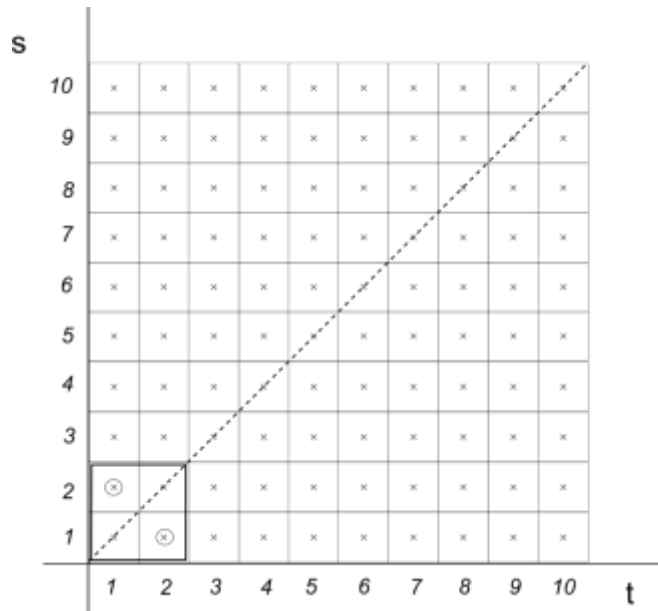
Uložená magnetická energie na frekvenci f_0 se spočte takto:

```
WM = integral33('Wm1',J,Q,R,dl,f0);
```

Uložená elektrická energie pro f_0 takto:

```
WE = integral33('We1',J,Q,R,dl,f0);
```

Funkce `integral33` vykoná sumaci v rovnici (16). Tato funkce funguje podobně jako `integr2D.mat` u dipólu. Princip ukážeme na následujícím obrázku.

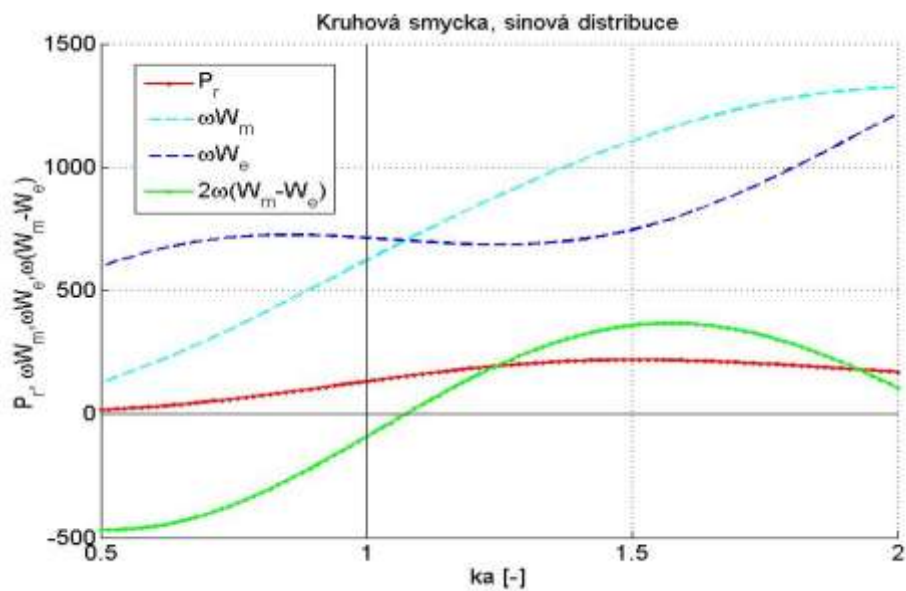


Obr 3.6.1 Popis dvojné integrace v rovnici (16)

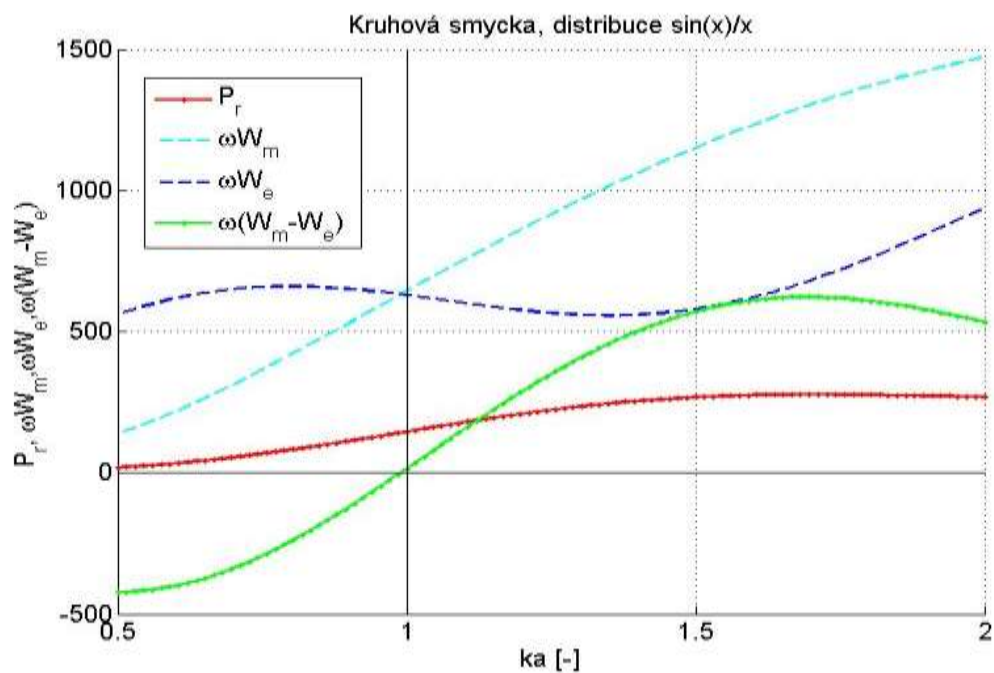
Celou plochu na obrázku rozdělím na čtverce 2×2 , ve všech spočteme tak jako v označeném čtverci $\text{Sum} = (f(1,2) + f(2,1))(dl_1 + dl_2) (dl_1 + dl_2)/2$. Celková suma přes všechny čtverce 2×2 dá výslednou hodnotu numericky řešeného integrálu.

4. Výsledky

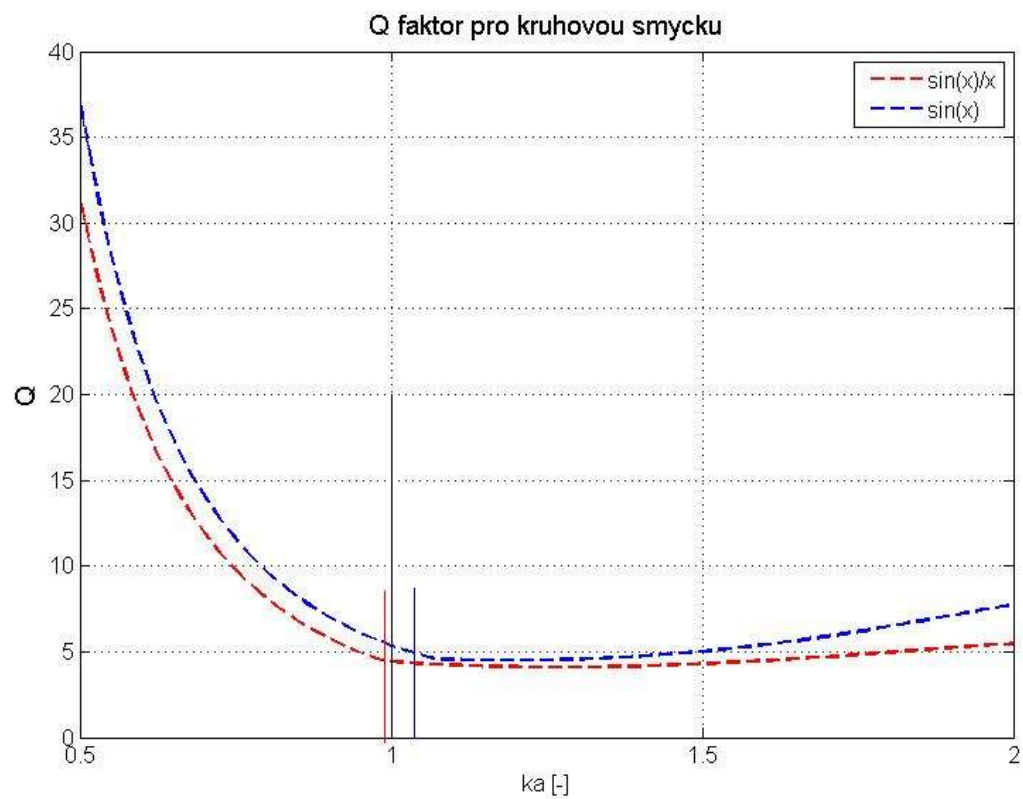
4.1 Kruhová smyčka



Obr 4.1.1 Závislosti pro kruhovou smyčku distribuce sinus

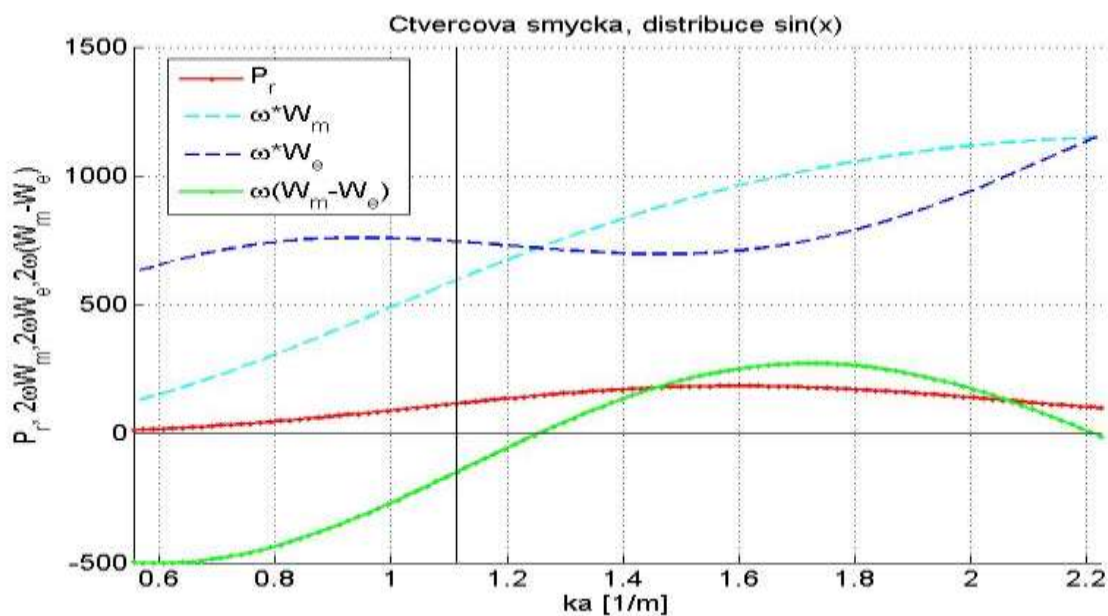


Obr 4.1.2 Závislosti pro kruhovou smyčku distribuce $\sin(x)/x$

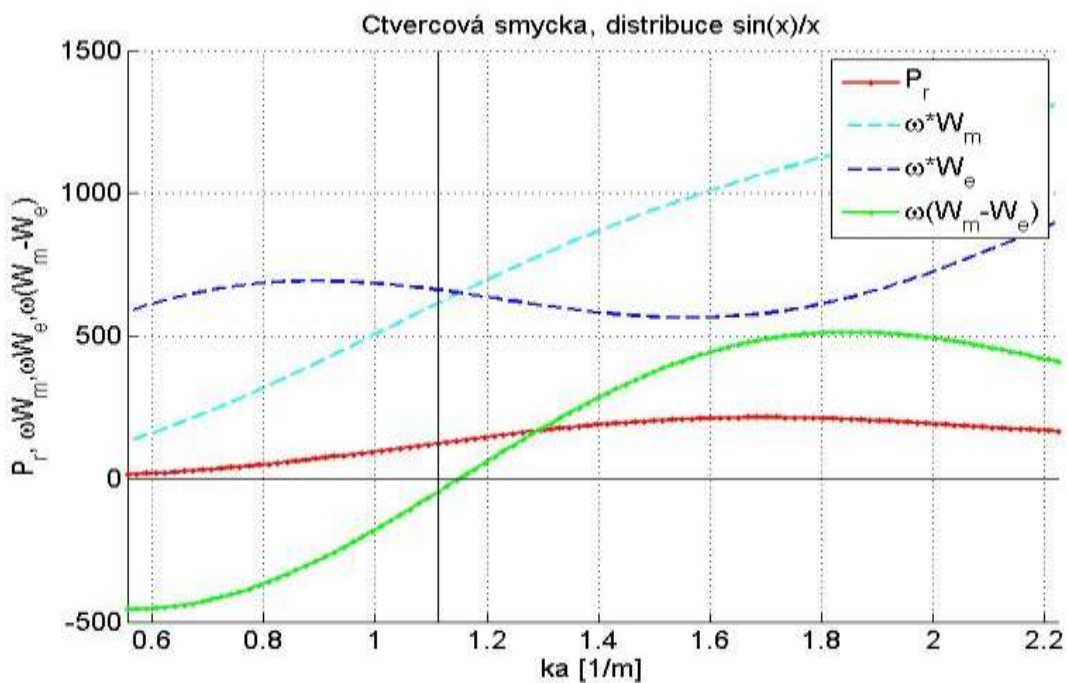


Obr 4.1.3 Závislosti pro kruhovou smyčku pro obě distribuce

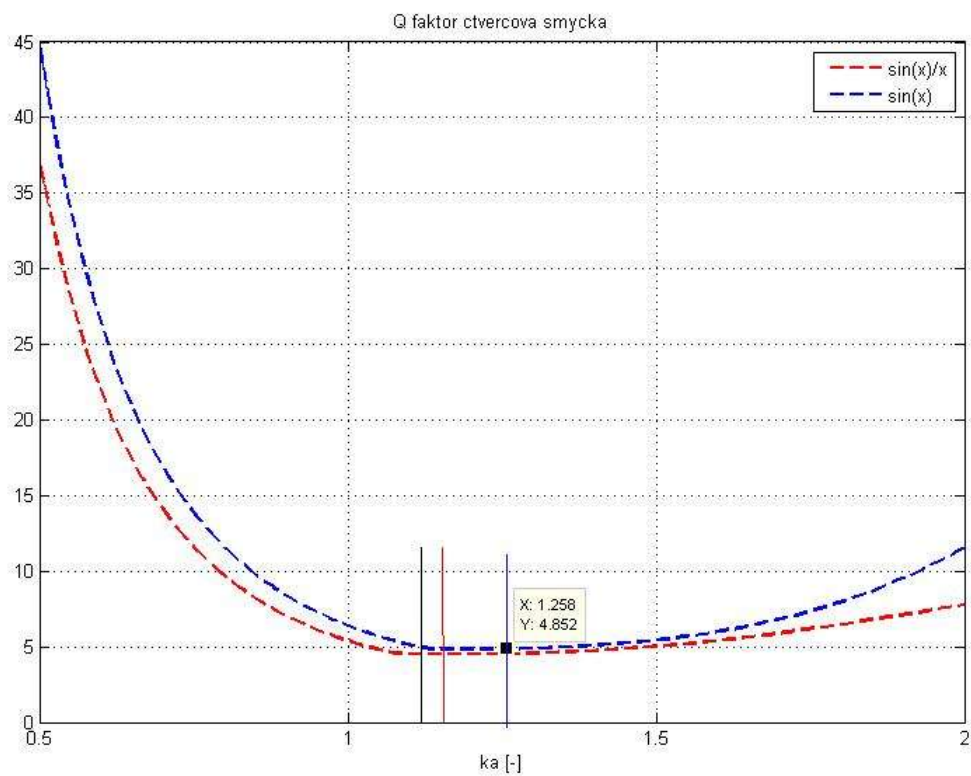
4.2 Čtvercová smyčka



Obr 4.2.1 Závislosti pro čtvercovou smyčku distribuce sinus



Obr 4.2.2 Závislosti pro čtvercovou smyčku distribuce $\sin(x)/x$



Obr 4.2.3 Závislosti pro čtvercovou smyčku pro obě distribuce

	Distribuce typu $\sin(k(L - x))$			
	ka_{rez}	$P_r[W]$	$\omega W_m, \omega W_e[W]$	Q[-]
Čtvercová anténa	1.25	148	720	4.85
Kruhová anténa	1.05	157	702	4.8

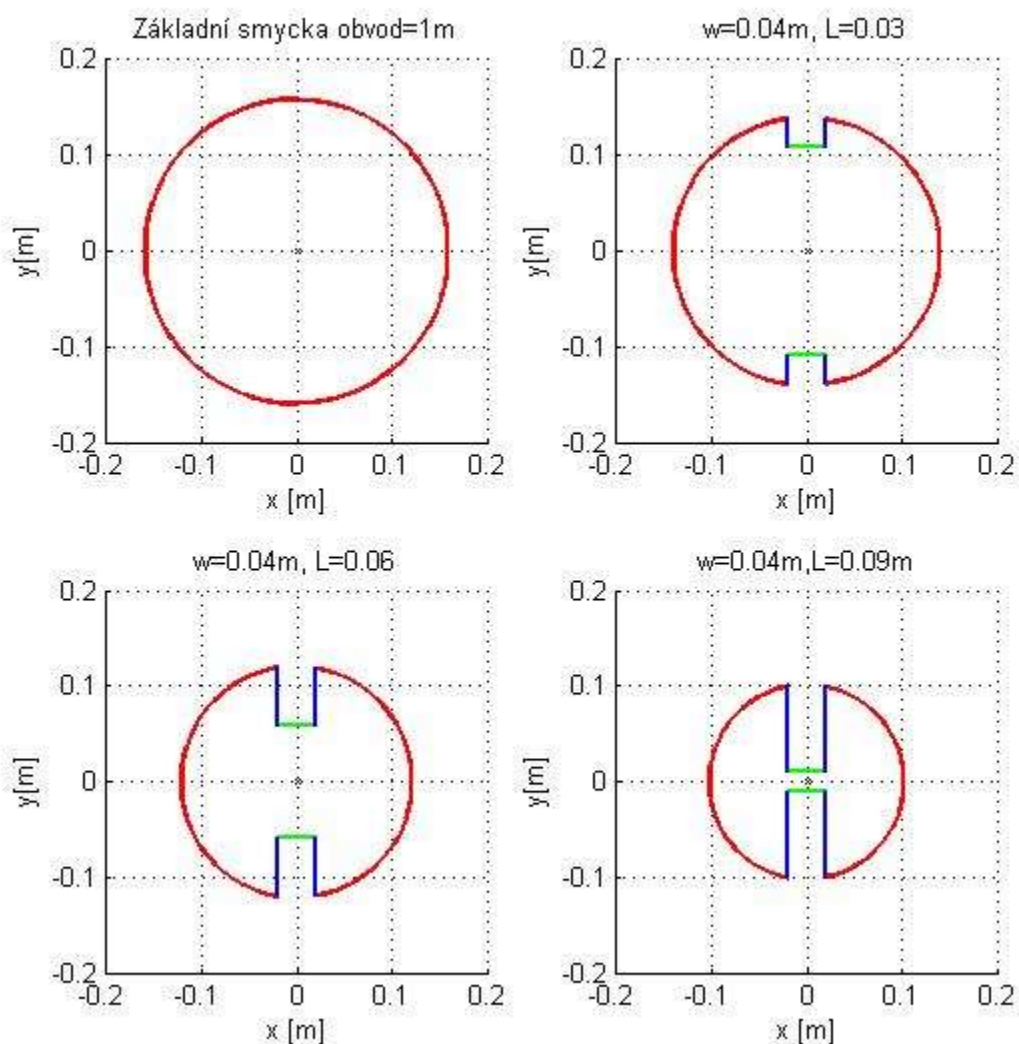
Tab 4.2.1 Distribuce sinus

	Distribuce typu $\sin(k/(2Lx)) / (k/(2Lx)) - 2\sin(k/2)/k$			
	ka_{rez}	$P_r[W]$	$\omega W_m, \omega W_e[W]$	Q[-]
Čtvercová anténa	1.15	132	652	4.51
Kruhová anténa	0.99	153	691	4.5

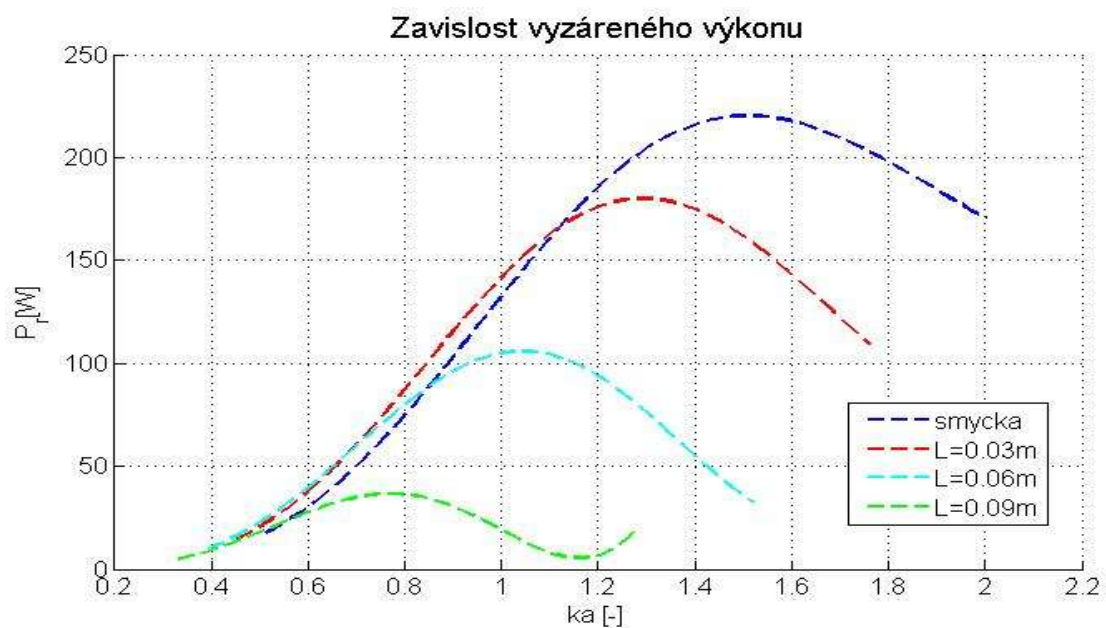
Tab 4.2.2 Distribuce $\sin(x)/x$

Na předchozích tabulkách, můžeme srovnat odečtené hodnoty z grafů. Na grafech závislosti vyzařovacího činitele Q pozorujeme, že křivky pro různé distribuce proudu mají velmi podobné průběhy, ale jsou vzájemně posunuty. Hodnoty faktoru Q odečtené v rezonanci pro obě distribuce se liší pouze o 0.3.

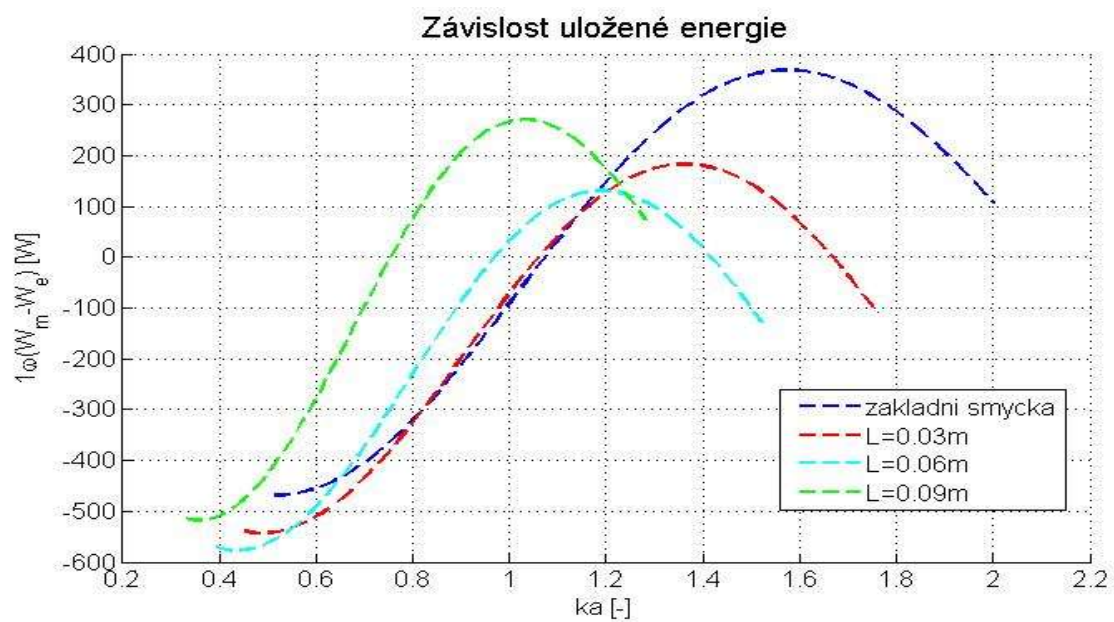
4.3 Elektricky zkrácená smyčka



Obr 4.3.1 Elektricky zkrácené smyčky o obvodu 1m



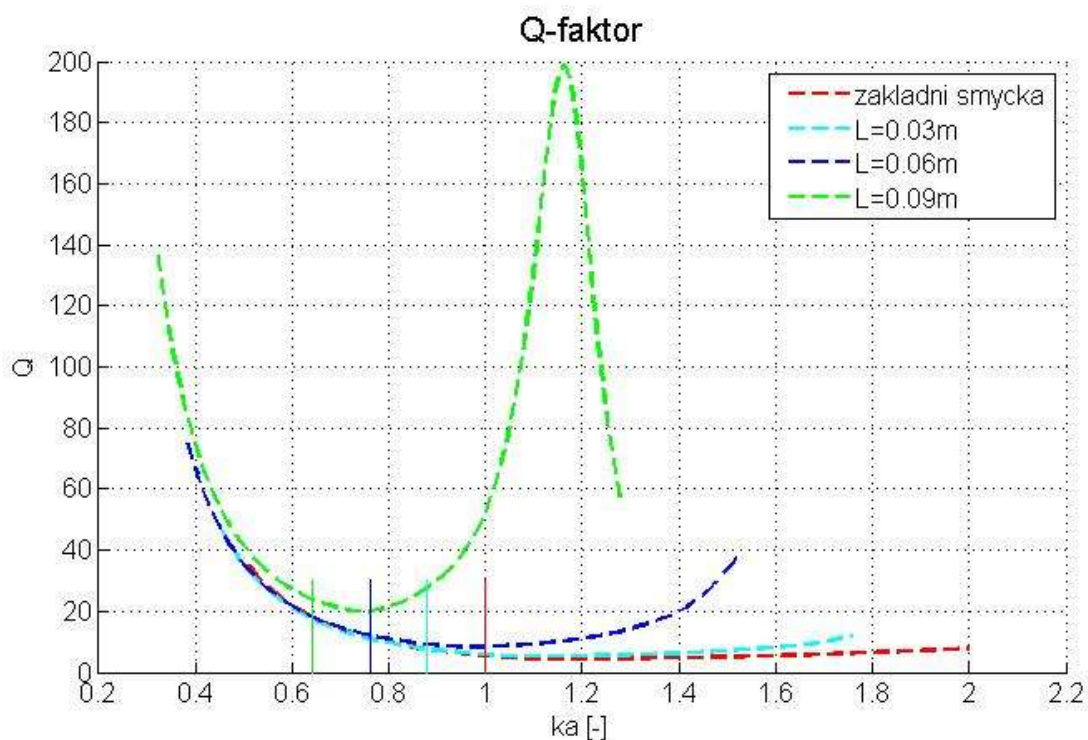
Obr 4.3.2 Závislost vyzáreného výkonu pro elektricky zkrácené smyčky



Obr 4.3.3 Závislost uložené energie pro elektricky zkrácené smyčky

antena	skutečná rezonance $f[\text{GHz}]$
kruhová smyčka	0.32
$W=0.04\text{m}$, $L=0.03\text{m}$	0.36
$W=0.04\text{m}$, $L=0.06\text{m}$	0.37
$W=0.04\text{m}$, $L=0.09\text{m}$	0.35

Tab 4.3.1 Rezonanční frekvence



Obr 4.3.4 Q-faktor pro elektricky zkrácené smyčky

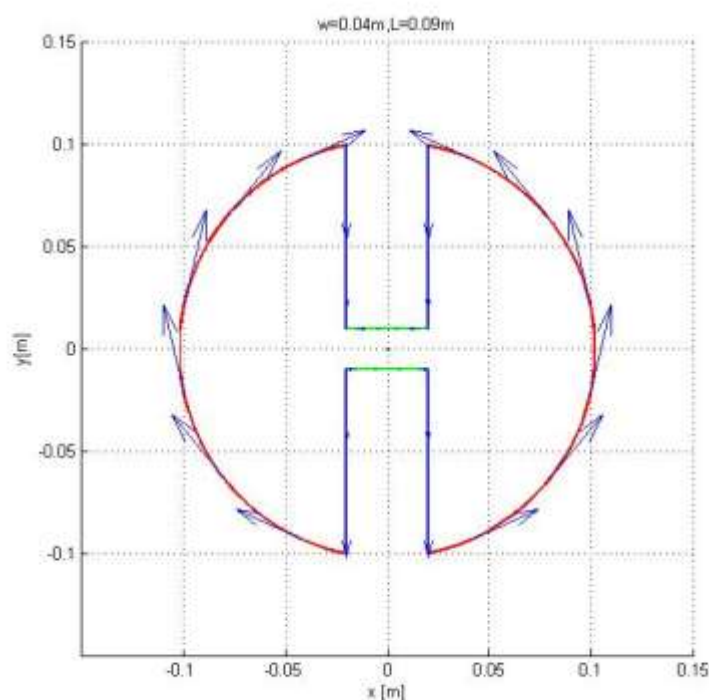
antena	$L_r[\%]$	$a [\text{m}]$	k_{reza}	$Q []$
kruhová smyčka	100	0.159	1	5.345
$W=0.04\text{m}$, $L=0.03\text{m}$	80	0.140	0.879	7.603
$W=0.04\text{m}$, $L=0.06\text{m}$	68	0.121	0.760	11.93
$W=0.04\text{m}$, $L=0.09\text{m}$	56	0.102	0.640	23.97

Tab 4.3.2 Srovnání elektricky zkrácených smyček se základní smyčkou

Porovnáním vyzařovacího činitele jakosti, můžeme konstatovat, že kruhová smyčka má na rezonanční frekvenci 1.módu nejlepší vyzařovací vlastnosti. To se dá vysvětlit pomocí obr 3.5.1.

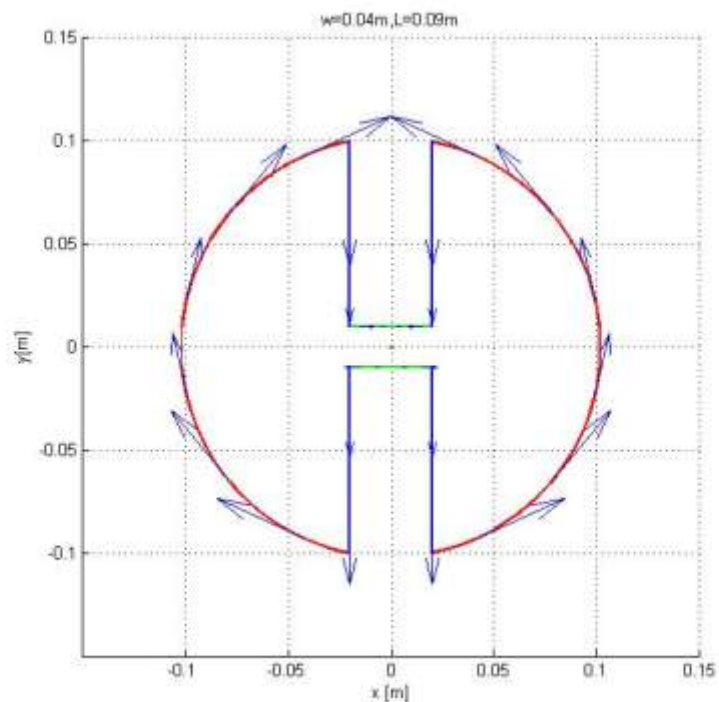
Elektromagnetické chování na kruhové smyčce na rezonanční frekvenci 1.módu, lze chápat jako dva dipóly paralelně vedle sebe. Ve vzdálené zóně se elektromagnetické pole vyvolané sinovým proudovým rozložením na těchto půlobloucích (dipólech) sčítá, protože proudová rozložení jsou ve fázi.

Pro elektricky zkrácené smyčky jsme zavedli koeficient vyzařovací délku L_r . Tento koeficient udává délku obou oblouků k celkové délce obvodu v procentech. S menší vyzařovací délkou roste vyzařovací činitel jakosti Q . Můžeme konstatovat, že na obloucích se vyzařuje výkon P_r a na úsecích mezi oblouky se soustředí akumulovaná elektromagnetická energie W_e, W_m .



Obr 4.3.5 Sinové proudové rozložení na el. zkrácené smyčce na rezonanční frekvenci

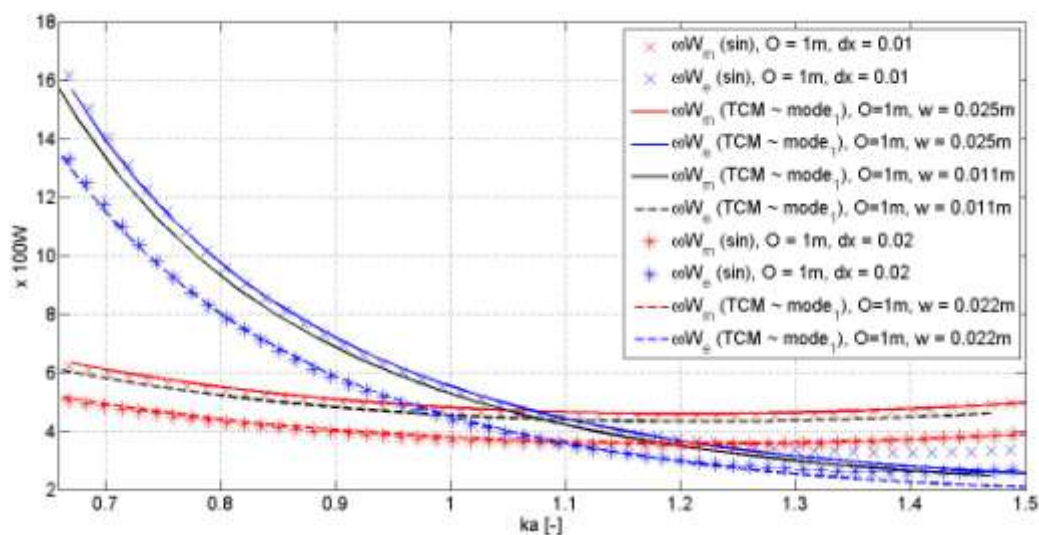
Na obr 4.3.5 vidíme třetí případ elektricky zkrácené smyčky, s nejvyšším činitel vyzařování Q na rezonanční frekvenci 1.módu. Proudové rozložení na indukčním úseku (označen modrou barvou) je v protifázi s proudovým rozložením na oblouku. Toto proudové rozložení snižuje celkovou vyzářenou energii a z toho plyne, že zvyšuje hodnotu Q . Kapacitní část (úseky označené zelenou barvou) jsou blízko sebe, to má vliv na rezonanční frekvenci antény. Měníme-li délky úseků antény můžeme ladit rezonanční frekvenci 1.modu, ale vždy docílíme koeficientu Q vyššího než u kruhové smyčky.



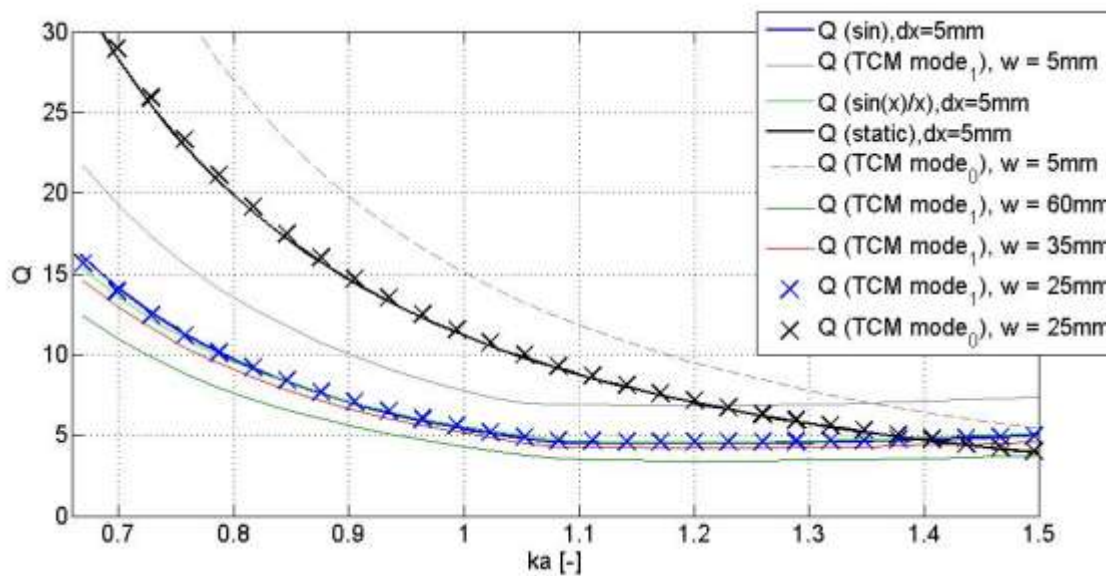
Obr 4.3.6 Sinové proudové rozložení na el. zkrácené smyčce na frekvenci $f = 1.8f_{rez}$

Na grafu závislosti faktoru Q obr. 4.3.4 vidíme, že u elektricky zkrácené smyčky s $L=0.09\text{m}$ faktor Q nabývá maxima pro $ka=1.17$, což odpovídá frekvenci $f = 1.8f_{rez}$. Tato frekvence je pro účinné vyzařování nejméně vhodná, což je vidět na rozložení proudu na obr. 4.3.6.

4.4 Srovnání výsledku s výsledky získanými pomocí teorie charakteristických modů

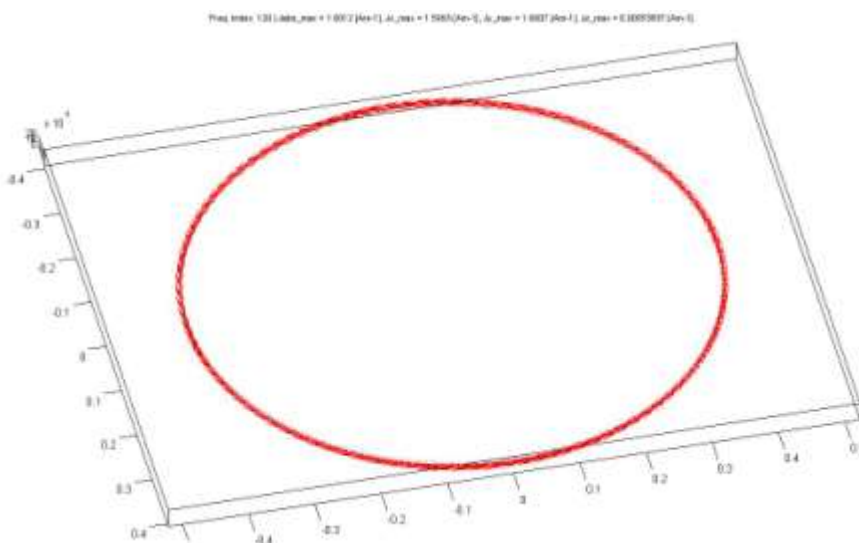


Obr 4.4.1 Srovnání s metodou TCM

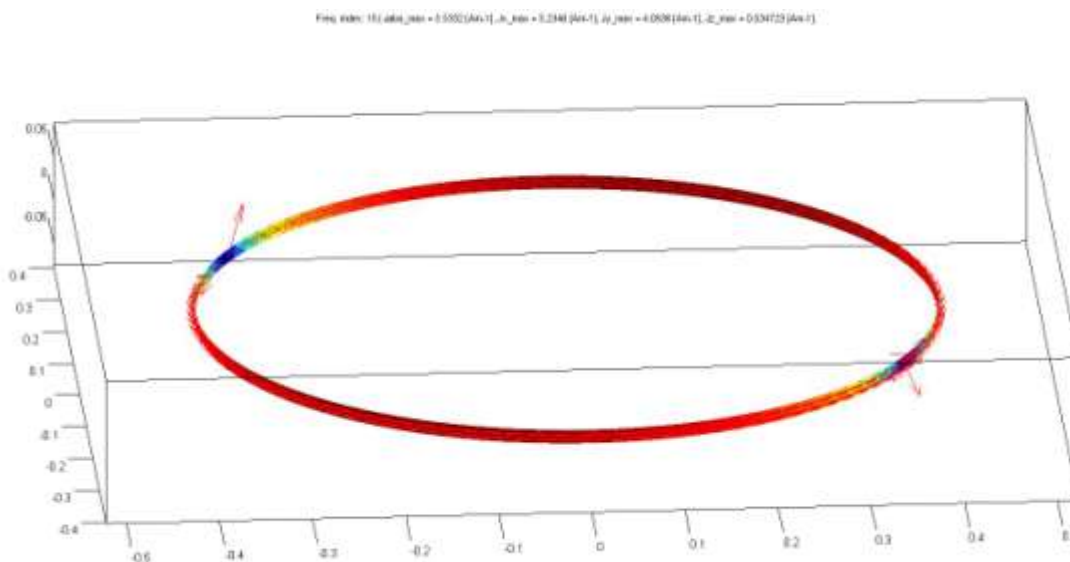


Obr 4.4.2 Srovnání vypočteného faktoru Q

Na obr. 4.4.1 a 4.4.2 vidíme, že výsledky získané pomocí teorie charakteristických módů, jsou v dobré shodě s výsledky získanými pomocí integrační metody. V simulátoru TCM byl vytvořen kruhový pásek o obvodu 1m a šířce w . Získaná data jsou v grafech srovnána s daty naší kruhové smyčky o stejném obvodu a diskretizaci dx , pro statický mód a 1.mód. U prvního módu byla použita sinová distribuce. Můžeme si všimnout souvislosti mezi šířkou pásku w a diskretizací dx .



Obr 4.4.3 statický mod na smyčce



Obr 4.4.4 1.mod na smyčce

5. Závěr

Diplomová práce navázala na individuální projekt. Podařilo se spočítat vlastní impedanci půlvlnného velmi tenkého dipólu $Z_A = R_{vyz} + jX_A = 73.079 + j42.515 \Omega$ na základě vztahů prof. Vandenbosche. Tyto hodnoty se velmi dobře shodují s teoretickou hodnotou $73.03 + j42.49 \Omega$. Ověřili jsme, že pomaleji konverguje hodnota uloženého výkonu. Konkrétní výsledné řešení je závislé na diskretizaci, což při uvažování drátové struktury přímo souvisí se zadaným poloměrem vodiče. Postup, který jsme použili pro výpočet vyzářeného výkonu P_r a akumulované energie $\omega(W_m - W_e)$ na rezonanční frekvenci pro půlvlnný tenký dipól délky 2m, jsme použili pro frekvence $4 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ (obr.3.1.2). Bylo pozorováno, že skutečná rezonance je odlišná od rezonance půlvlnného dipólu.

Dále byla parametrizována elektricky zmenšená smyčka, kruhová a čtvercová smyčka. Pro tři elektricky zkrácené smyčky jsme spočetli závislosti vyzářeného výkonu a uložené elektrické a magnetické energie a závislost činitele vyzařování Q .

Integrační metodu jsme porovnali s metodou charakteristických módů, pro sinovou distribuci proudu a zvolené diskretizace se výsledky dobře shodují na frekvencích blízkých rezonanční frekvenci 1.modu. ($0.5f_{rez} - 2f_{rez}$)

Další práce na toto téma může směřovat k použití vztahů popisující proudové rozložení na smyčce odpovídající vyšším módům.

Literatura:

- [1] Vandenbosch G. A. E., "Reactive "Energies, Impedance, and Q Factor of radiating structures," IEEE *Trans.Antennas Propag.*, vol.58, no.4, pp.1112-1127, Apr.,2010
- [2] Novotný K., Teorie elektromagnetického pole II Elektromagnetické pole a vlny, skripta, ČVUT 2000,9546 . publikace
- [3] Mazánek M., Pechač P., Šíření elektromagnetických vln a antény, skripta, ČVUT 2008, 11148. Publikace
- [4] Daniš S., Základy programování v prostředí Octave a Matlab, MATFYZPRESS 2009, 276. Publikace, ISBN 978-80-7378-082-1
- [5] Čapek M., Hazdra P., Eichler J.: A Method for Evaluating of Radiation Q Based on Modal Approach, *submitted to IEEE-AP, Vol.6, No. 1.*, January 2007
- [7] Balanis, A. Constantine: Antenna theory. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005, pp 176, 153-155
- [8] Kraus J. D. "Antennas" second edition, McGraw-Hill Book Company, 1988, ISBN 0-07-0354 22-7
- [9] Fabres C. M. "Systematic design of antennas using the theory of characteristic modes" , UPU, 2007, disertační práce
- [10] Harrington R. F., "Field computation by Moment Methods", Wiley-Interscience
- [11] Jefrey A., Dai H., "Handbook of Mathematical formulas and integrals", IV. Edition, 2008
- [12] Jefrey A., Dai H., "Handbook of Mathematical formulas and integrals", IV. Edition, 2008
- [13] Hallen E., "Electromagnetic theory", 1962
- [14] King W.P. Ronold, "The theory of Linear Antennas with Charts and Tables for Practical Application ", Harvard University Press, 1956
- [15] Harrington F. Roger, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", John Wiley & Sons, 2001
- [16] Hilbert D., Courant R., "Methods of Mathematical Physics", Wiley, 1989
- [17] Dorf C. R., "Electromagnetic Electrical Engineering Textbook", 2001
- [18] Yaghjian A. D. and S. R. Best, "Impedance, Bandwidth and Q of Antennas" IEEE Trans. Antennas Propag., vol.53, no.4, pp 1298-1324, Apr., 2005
- [19] Vlk J., "Návrh a realizace elektricky malé antény", Diplomová práce, ČVUT FEL, 2002

Dodatky

Distribuční funkce:

Funkce `J_sin(x, k0, L)` vypočte proudové rozložení na dipólu celkové délky $2L$ podle rovnice (37), která aproximuje proudové rozložení 1.módu. Tato funkce později poslouží k převedení této distribuce na polovinu kruhové nebo čtvercové smyčky.

```
function out = J_sin(x, k0, L)
%% J: Prepares current distribution
% x poloha nebo usek na dipólu x <-L/2, L/2>
% L je celková délka dipólu

L_2=L/2; % délka pùlramene dipólu
out = sin(k0.*(L_2-abs(x))); % výstup, sinová distribuce
```

Funkce `q_sin(x, k0, L)` vypočte proudové rozložení na dipólu celkové délky $2L$ podle rovnice (44).

```
function out = q_sin(x, k0, L)
%% qq: Prepares charge distribution
% x poloha nebo usek na dipólu x <-L/2, L/2>
% L je celková délka dipólu

L_2=L/2; % délka pùlramene dipólu
out = -k0.*cos(k0.*(L_2 -abs(x))).*sign(x); %výstup
```

Parametrizující funkce:

Funkce `get_sources_dipole` používá obě předchozí funkce - zdrojové rozložení na dipólu. Podle zadané diskretizace dx vytvoří matice vzorků J, Q, R, dl . Obdobně bude tento postup použit u dalších funkcí s předponou `get_sources_`.

```
function [J, Q, R, dl]=get_sources_dipole(lengx, dx, f0, ~, J_d, q_d)
%% get_sources_dipole: dané distribuce zdrojù J_d, q_d pøeve na dipol a
% vytvoří vzorky.
%
% -INPUT-----
% lengx ~ celková délka dipólu
% dx ~ diskretizace
% f0 ~ frekvence na které pøevádíme distribuce J_d, q_d na dipól
% J_d ~ fce obsahující rozložení proudu na dané frekvenci
% q_d ~ fce obsahující rozložení náboje na dané frekvenci
% -OUTPUT-----
% J ~ matice vektorù proudu
% Q ~ matice náboje
% R ~ matice polohových vektorù
% dl ~ vektor délek elementù, suma (dl) = lengx
% -----
%
% Example: [J, Q, R, dl]=get_sources_dipole(2, 0.01, 7.5e+007, 1, 'J_sin', 'q_sin')
```

```

% konstanty

LL=lengx/2; %délka půlramena dipólu

c0 = 299792458; % velocity of light (in vacuum)
omega0 = 2*pi*f0; % radian frequency
k0 = omega0./c0; % wave number (in vacuum)

%diskretizace

N=2*ceil((lengx)/(2*dx)); % diskretizace- je potřeba sudý počet vzorků
initl=-LL+(LL)/(2*N); % první vzorek
finall=LL -(LL)/(2*N); % poslední vzorek
stepl=(2*LL)/N; % krokování

%parametrizace

x=initl:stepl:finall; % x-ové souřadnice vzorků
y=0.*ones(1,N); % y-ové souřadnice vzorků
Jx=feval(J_d,x,k0,2*LL); % x-ové složky proudového rozložení
Jy=0.*y; % y-ové složky proudového rozložení
J=[Jx;Jy]; % matice vektorů J odpovídající polohám R
R=[x;y]; % matice poloh vzorků R
Q = feval(q_d,x,k0,2*LL); % vektor nábojů Q odpovídající polohám R
dl=stepl*ones(1,N); % délky úseků

%kontrolní zobrazení

Rx=R(1,:); % x-ové souřadnice vzorků
Ry=R(2,:); % y-ové souřadnice vzorků
Jx=J(1,:); % x-ové složky proudového rozložení
Jy=J(2,:); % y-ové složky proudového rozložení

figure(1) %kontrolní graf
plot(Rx,Ry)
quiver(Rx,Ry,Jx,Jy); %proudové rozložení na dipólu
figure(2) %kontrolní graf
plot(Rx,Q, 'r') %červení náboj na dipólu
hold on;
plot(Rx,Jx); %modul proud na dipólu
hold off;

```

Integrace

Následující funkce vypocet provede dvojnou integraci popsanou v odstavci 3.6. Výsledkem je závislost P_r , W_m , W_e , W_a , Q_f na frekvenci pro zvolenou anténu.

```

function [PR,WM,WE,WA,Qf,f]=
vypocet(get_sources_antenna,obvod,dx,mod,J_d,q_d)
%% vypocet: vypočítá PR, WM, WE, Qf na daném frekvenčním rozsahu pro
% smyčkovou anténu (kruhovou ,ctvercovou) nebo dipólu, v případě dipólu
% se místo obvodu zadává celková délka dipólu.

```

```

%
%
% -----INPUT-----
%   get_sources_antenna      ~ specifikuje smyčku čtvercová/kruhová
%   obvod                    ~ obvod smyčky
%   dx                       ~ diskretizace
%   mod                      ~ mód 0 nebo 1
%   J_d                      ~specifikuje rozložení proudu sin,cos nebo typu sin(x)/x
%   q_d                      ~specifikuje rozložení proudu sin, cos nebo typu sin(x)/x
% -----OUTPUT-----
%   PR      ~ vektor vyzářených výkonů na frekvenčním rozsahu f
%   WM      ~ vektor uložené magnetické energie na frekvenčním rozsahu f
%   WE      ~ vektor uložené elektrické energie na frekvenčním rozsahu f
%   WA      ~ vektor akumulované energie na frekvenčním rozsahu f
%   Qf      ~ Q-faktor na na frekvenčním rozsahu f
% -----
%
% Example:
% [PR,WM,WE,Q,f]= vypocet('get_sources_loop',1,0.01,1,'J_sin','q_sin')
% [PR,WM,WE,Q,f]=
vypocet('get_sources_squared_loop',1,0.01,1,'J_sin','q_sin')
% [PR,WM,WE,Q,f]= vypocet('get_sources_squared_loop3',1,0.01,0)
% [PR,WM,WE,Q,f]= vypocet('get_sources_loop4',1,0.01,1,'J_sin','q_sin')
% [PR,WM,WE,Q,f]= vypocet('get_sources_dipole',2,0.01,1,'J_sin','q_sin')
% určení rezonanční frekvence

lambda=obvod;           %lambda na celém obvodu odpovídá první rezonanci
c0      = 299792458;     %rychlost světla
f0      = c0/lambda;     %rezonanční frekvence 1.módu

if strcmp(get_sources_antenna,'get_sources_dipole')
    f0=c0/(2*obvod);     %obvod je v tomto případě celková délka dipolu
end

% Frekvenční osa

f = linspace(f0/2,2*f0,100);

%mod 0 - bude použit konst. proud a nulový náboj

if (mod==0)
    J_d='J_mod0';
    q_d='q_mod0';
end

PR = zeros(size(f));
WM0 = zeros(size(f));
WE0 = zeros(size(f));

% Integrace

```



```

for this_f = 1:length(f)
    disp(['Sample: ' num2str(this_f) '/' num2str(length(f))]);
    [J,Q,R,d1]=(feval(get_sources_antenna,obvod,dx,f(this_f),mod,J_d,q_d));
    %tento řádek vygeneruje zdroje na 2D anténě pomocí funkce get_sources_
    PR(this_f) = integral33('Pr1',J,Q,R,d1,f(this_f));
    WM0(this_f) = integral33('Wm1',J,Q,R,d1,f(this_f));
    WE0(this_f) = integral33('We1',J,Q,R,d1,f(this_f));
end

```

```

WA = 4*pi.*f.*(WM0 - WE0);           % = 2*omega(Wm - We)
WM = 4*pi.*f.*WM0;                   % = 2*omega*Wm
WE = 4*pi.*f.*WE0;                   % = 2*omega*We
Qf = 4*pi.*f.*max(WM0,WE0)./PR;      % = 2*omega*max(Wm,We)/Pr

```

Funkce vypocet používá funkci integral33, zde je její popis:

```

function suma=integral33(func,J,Q,R,d1,f)
% func je funkce na které spočtu určitý integrál
% funkci volám z příkazového okna pomocí příkazu
% napø.: integral33('Pr',J,Q,R,d1,74948114.5);
% a,b je horní, dolní mez ve směru osy x,y
% N je dělení osy x,y

suma=0.0;

t=cputime;

%euclidean distance of s and t element

for t=1:2:(length(d1))
    for s=1:2:(length(d1))

        suma=suma+(feval(func,J(:,s),J(:,t+1),Q(s),Q(t+1),sqrt((R(1,s)-
R(1,t+1))^2+(R(2,s)-
R(2,t+1))^2),f)+feval(func,J(:,s+1),J(:,t),Q(s+1),Q(t),sqrt((R(1,s+1)-
R(1,t))^2+(R(2,s+1)-R(2,t))^2),f))/2.0*(d1(s)+d1(s+1))*(d1(t)+d1(t+1));

    end
end

t1=cputime-t;
fprintf('Výsledek integrace: ');
fprintf('%0.7f ',suma);
fprintf('čas počítání: ');
fprintf('%0.7f ',t1);
fprintf('\n ');

```

Kruhová smyčka

```
function [J,Q,R,dl]=get_sources_loop(obvod,dx,f0,mod,J_d,q_d)
%% get_sources_loop4: spočte na kruhové smyčce zdroje J,Q za předpokladu
%   použití distribuce proudu J_d a distribuce náboje J_q
%
% -----INPUT-----
%   obvod    ~ obvod smyčky
%   dx       ~ diskretizace
%   f0       ~ frekvence na které jsou vygenerovány výstupy
%   mod      ~ mód 0 nebo 1
%   J_d      ~ distribuce proudu
%   q_d      ~ distribuce náboje
% -----OUTPUT-----
%   J        ~ matice vektorů proudů na smyčce
%   Q        ~ vektor nábojů na smyčce
%   R        ~ vektor poloh elementu v rovině x-y
%   dl       ~ vektor délek elementů
% -----
c0          = 299792458; % rychlost světla

if nargin<1,
    obvod=1;
    dx=0.05;
    lambda=obvod;
    f0      = c0/lambda; % rezonanční frekvence
    mod=1;
    J_d='J_sin';
    q_d='q_sin';

end

omega0  = 2*pi*f0;          % radian frequency
k0      = omega0./c0;       % wave number (in vacuum)
radius=obvod/(2*pi);
LL=obvod/4;
% 2*LL délka dipólu, jehož J a q distribuce použijí k získání J a q
% na pravé polovině smyčky,

%prvá polovina smyčky
arc=obvod/2;               %délka pravé poloviny smyčky (pravého oblouku)
NM=2*ceil(arc/(2*dx));     %vytvoření diskretizace - sudý počet elementů
init3=arc/(2*Nm);
step3=arc/NM;              %delka oblouku je rozdělena na NM elementu delky
step3
stepangle=pi/(NM);         % úhel pi je rozdělena na stejný počet
initangle=-pi/2+stepangle/2;
finalangle=pi/2-stepangle/2;

t=initangle:stepangle:finalangle; %oblouk je rozdělen NM dílů, uprostřed
každého dílu bude určen vektor J a skalár Q
l=-LL+init3:step3:LL-init3;     %taktéž dipol délky 2xLL je rozdělen na NM
dílu

x=radius.*cos(t);            % x-souřadnice elementu
```

```

y=radius.*sin(t);           % y-souřadnice elementu

Jx=-sin(t).*(feval(J_d,1,k0,2*LL)); %distribuce J_d na dipólu délky 2LL je
převedená na oblouk
Jy=cos(t).*(feval(J_d,1,k0,2*LL));
J=[Jx;Jy];                  % matice vektorů proudů

R=[x;y];                    % polohy elementů
Q =feval(q_d,1,k0,2*LL);    % náboj na dipólu délky 2LL odpovídá náboji na
oblouku stejné délky
dl=stepangle*radius*ones(1,NM); %délky elementů

%doplňení levo polokruhu - získáme zrcadlením

Rx=R(1,:); %x-ové souřadnice poloh elementů na pravé straně
Ry=R(2,:); %y-ové souřadnice poloh elementů na pravé straně

Rx1=-1.*Rx(end:-1:1); %x-ové souřadnice poloh elementů na levé straně
Ry1=Ry(end:-1:1);    %y-ové souřadnice poloh elementů na levé straně

R=[R,[Rx1;Ry1]];      %celková matice poloh vektorů

Jx=J(1,:);            %x-ové souřadnice proudů na levé straně
Jy=J(2,:);            %y-ové souřadnice elementů na levé straně
if (mod==0)
Jx1=Jx(end:-1:1);      % orientace proud; je proti směru hodin. ručiček
Jy1=-Jy(end:-1:1);
else
Jx1=-Jx(end:-1:1);     %orientace proudů na levé straně je stejná jako pravé
straně
Jy1=Jy(end:-1:1);      % t.j. odspoda nahoru
end

J=[J,[Jx1;Jy1]];

Q1=Q(end:-1:1);        %náboj na levé straně je zrcadlen z pravé strany
Q=[Q,Q1];              %(v případě modu 0, je použita distribuce q_d kdy náboj
je roven 0)

dl1=dl(end:-1:1);
dl=[dl,dl1];

%pomocné grafy

Rx=R(1,:);
Ry=R(2,:);
Jx=J(1,:);
Jy=J(2,:);
figure(1)
plot(Rx,Ry)

```

```

quiver(Rx,Ry,Jx,Jy);
figure(2)
plot(cumsum(d1),Q)
hold on;
plot(cumsum(d1),sqrt(Jx.^2+Jy.^2));

```

Čtvercová smyčka

```

function out = J(x,k0)
%% J: Prepares current distribution

out = sin(k0.*(1-abs(x)));

function out = qq(x,k0)
%% qq: Prepares charge distribution

out = -k0.*cos(k0.*(1 - abs(x))).*sign(x);

function INT_Pr = Pr8(x,y,f)
%% PR8: Integrates total radiated power (Vandenbosch's relations)

epsilon = 8.854187817e-12; % permittivity of vacuum
c0       = 299792458;      % velocity of light (in vacuum)
k0       = 2*pi*f./c0;     % wave number (in vacuum)

C1       = 1./(4*pi*2*pi*f.*epsilon); % given constant
INT_Pr   = C1.*(k0.^2.*J(x,k0).*J(y,k0) - ...
    qq(x,k0).*qq(y,k0)).*sin(k0.*abs(x-y))/abs(x-y);

function INT_Wm = Wm(x,y,f)
%% We: Integrates electric energy (Vandenbosch's relations)

epsilon = 8.854187817e-12; % permittivity of vacuum
c0       = 299792458;      % velocity of light (in vacuum)
omega0   = 2*pi*f;        % radian frequency
k0       = omega0./c0;     % wave number (in vacuum)

C1       = 1./(8*pi*omega0.^2.*epsilon); % given constant
INT_Wm   = C1.*(k0.^2.*J(x,k0).*J(y,k0).*cos(k0.*abs(x-y))./abs(x-y) ...
    - k0./2.*(k0.^2.*J(x,k0).*J(y,k0) ... % Wrad/2 term...
    - qq(x,k0).*qq(y,k0)).*sin(k0.*abs(x-y)));

function INT_We = We(x,y,f)
%% We: Integrates electric energy (Vandenbosch's relations)

epsilon = 8.854187817e-12; % permittivity of vacuum
c0       = 299792458;      % velocity of light (in vacuum)
omega0   = 2*pi*f;        % radian frequency

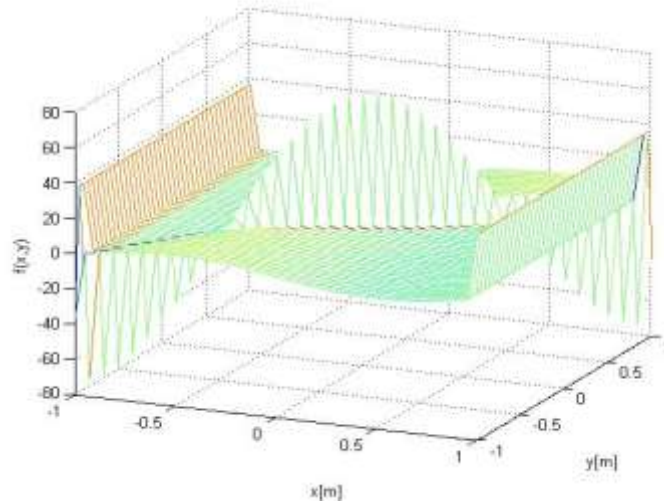
```

```

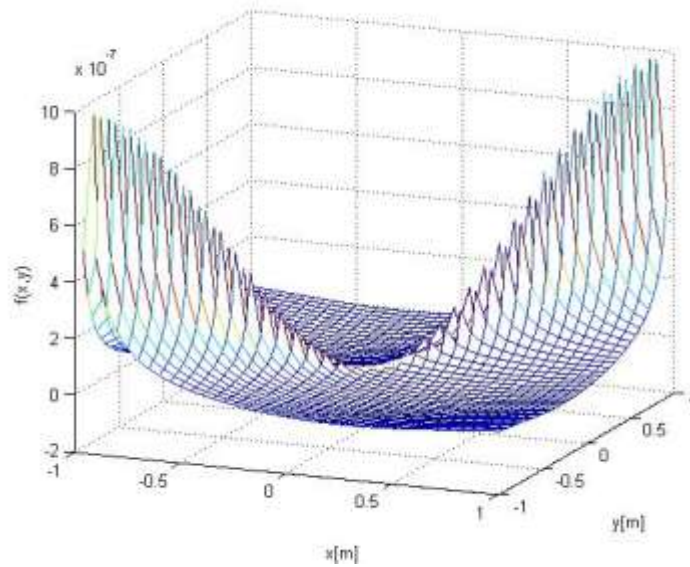
k0      = omega0./c0;          % wave number (in vacuum)

C1      = 1./(8*pi*omega0.^2.*epsilon); % given constant
INT_We  = C1.*(qq(x,k0).*qq(y,k0).*cos(k0.*abs(x-y))./abs(x-y) ... % reg.t.
- k0./2.*(k0.^2.*J(x,k0).*J(y,k0) ... % Wrad/2 term ...
- qq(x,k0).*qq(y,k0)).*sin(k0.*abs(x-y)));

```



Obr. Funkcef(x, y)v (62)



Obr. Funkcef(x, y)v integrálu (68)